18 （'11　東京医科歯科大）　**【難易度】** … **標準**

自然数 n に対し

$$S_n=\int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}\,dx,\quad T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$$

とおく．このとき，以下の各問いに答えよ．

（1）　次の不等式を示せ．

$$\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx\right|\leqq\frac{1}{n+1}$$

（2）　T_n-2S_n を n を用いて表せ．

（3）　極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$ を求めよ．

【テーマ】：定積分と不等式

方針

(1) は，実際に S_n を代入してみれば方針が見えてきます．積分区間に着目してこの区間で成り立つ不等式を考えましょう．(2) は，S_n の被積分関数が等比数列の和の形になっていることに気付くことがポイントです．(3) は，(1), (2) の結果を用いましょう．

♣ ♠

解答

（1）　**【証明】**

$$\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx\right|=\left|\int_0^1\frac{-(-x)^n}{1+x}\,dx\right|=\left|\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx\right|$$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$1\leqq 1+x\leqq 2$ より，

$$\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{1+x}\leqq 1\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{1}{2}x^n\leqq\frac{x^n}{1+x}\leqq x^n$$

よって，

$$\left|\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx\right|\leqq\left|\int_0^1 x^n\,dx\right|=\frac{1}{n+1}$$

となり，示された．　**（証明終）**

（2）　$\dfrac{1-(-x)^n}{1+x}$ は初項 1，公比 $-x$，項数 n の等比数列の和を表しているので，

$$\begin{aligned}S_n&=\int_0^1\{1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-x)^{n-1}\}\,dx\\&=\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right]_0^1\\&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}T_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\frac{(-1)^k}{k+1}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)\\&=-1+2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)+\frac{(-1)^n}{n+1}\end{aligned}$$

$$= -1 + 2S_n + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

ゆえに，$T_n - 2S_n = \boldsymbol{\frac{(-1)^n}{n+1} - 1}$……**（答）**

（3）$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \Big[\log|1+x|\Big]_0^1 = \log 2$ より，（1）から，

$$|S_n - \log 2| \leqq \frac{1}{n+1}$$

$n \to \infty$ のとき，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty} |S_n - \log 2| = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \log 2$$

（2）より，

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}\left(2S_n + \frac{(-1)^n}{n+1} - 1\right)$$
$$= \boldsymbol{2\log 2 - 1}$$……**（答）**

◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

類題の経験がないとやや難しく感じるでしょう．問題の大きな流れは，（1）で S_n の極限値を求める準備をしておき，（2）で，S_n と T_n の関係式を導き，（3）でそれらを用いてはさみうちの原理から T_n の極限値を求めるのですが，（2）で S_n と T_n の関連を見つけるのに苦労するかもしれません．