17 （’99　大阪大） 【難易度】 … やや難

実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[\,x\,]$ で表す．$a_m=[\,\sqrt{m}\,]\,(m=1,2,3,\cdots\cdots)$ に対して，数列 $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots$ を $b_1=0$, $k\geqq 2$ のとき $a_m<k\leqq a_{m+1}$ となる m に対して $b_k=m$ と定める．次の問いに答えよ．

（1） 数列 $\{b_k\}$ の一般項を求めよ．

（2） すべての自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2} a_m+\sum_{k=1}^{n} b_k=n^3$ が成り立つことを示せ．

（3） $\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}[\,\sqrt{m}\,]$ を求めよ．

【テーマ】：ガウス記号で定義される数列

方針

実際に $\{a_m\}$ を書き出してみると規則性が見つかります．

解答

（1） 数列 $\{a_m\}$ を順に書き出すと，

$$1,\ 1,\ 1\ |\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2\ |\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ |\ 4,\ 4,\ \cdots\cdots$$

となり，数 n を一つの群と考え，第 n 群とする．$[\,x\,]$ の定義から，数列 $\{a_m\}$ の項は，

$$n^2\leqq m\leqq (n+1)^2-1 \text{ のとき，} a_m=n$$

であることがわかる．$a_m<b_k\leqq a_{m+1}$ は a_m が第 $k-1$ 群の末項であることを意味しているので，

$$\begin{aligned} b_k &= 3+5+7+\cdots+(2k+1)\\ &=\sum_{i=1}^{k-1}(2i+1)\\ &=2\cdot\frac{1}{2}k(k-1)+k-1\\ &=\boldsymbol{k^2-1}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

となる．

（2）（ｉ） $n=1$ のとき，

$$(\text{左辺})=a_1+b_1=1+1=1,\quad (\text{右辺})=1^3=1$$

となり，成り立つ．

（ii） $n=i$ のとき，

$$\sum_{m=1}^{i^2} a_m+\sum_{k=1}^{i} b_k=i^3 \cdots\cdots ①$$

が成り立つと仮定する．

$n=i+1$ のとき，

$$\sum_{m=1}^{(i+1)^2} a_m + \sum_{k=1}^{i+1} b_k = \sum_{m=1}^{i^2} a_m + \sum_{m=i^2+1}^{(i+1)^2} a_m + \sum_{k=1}^{i} b_k + b_{i+1}$$

$$= i^3 + a_{i^2+1} + a_{i^2+2} + a_{i^2+3} + \cdots\cdots + a_{(i+1)^2} + (i+1)^2 - 1 \quad (\because \ ①, (1))$$

$$= i^3 + \underbrace{[\sqrt{i^2+1}\,] + [\sqrt{i^2+2}\,] + [\sqrt{i^2+3}\,] + \cdots\cdots}_{\text{ここはすべて } i \text{ になる}} + [\sqrt{(i+1)^2}\,] + (i+1)^2 - 1$$

$$= i^3 + \underbrace{i + i + \cdots\cdots + i}_{i \text{ が } 2i \text{ 個}} + (i+1) + i^2 + 2i$$

$$= i^3 + 3i^2 + 3i + 1$$

$$= (i+1)^3$$

よって，$n = i+1$ のときも成り立つ．

以上より，示された．

(3) (1), (2) より，

$$\sum_{m=1}^{n^2} [\sqrt{m}\,] = n^3 - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$= n^3 - \sum_{k=1}^{n} (k^2 - 1)$$

$$= n^3 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n$$

$$= \frac{1}{6}n\{6n^2 - (n+1)(2n+1) + 6\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(4n^2 - 3n + 5)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇ ♡

解説

本問のように $a_m = [\sqrt{m}\,]$ で定義された数列は，m が平方数から平方数までは，同じ値をとることに着目して群数列を考えればよいことがわかります．本問では，設問の順番を見る限り，(2) を帰納法で証明させて $\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2} [\sqrt{m}\,]$ を計算させようとしていますが，群数列を用いればそんな方法をとらなくても次の式で求めることができます．

$$\sum_{m=1}^{n^2} [\sqrt{m}\,] = \sum_{k=1}^{n-1} k(2k+1) + n = \cdots = \frac{1}{6}n(4n^2 - 3n + 5)$$

これは，初項から第 n^2 項までの和を求めよという問題なので，群数列で考えれば，第 1 群の初項から第 n 群の初項までの和を求めよという問題と同じことがわかります．したがって，第 k 群の数 k が $2k+1$ 個あることから，第 1 群から第 $n-1$ 群の末項までの和 $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k(2k+1)\right)$ を求め最後に，第 n 群の初項 n を加えればよいわけです．