14 （'94　一橋大） 【難易度】 … 標準

正の整数 a, b, c, d が等式 $a^2+b^2+c^2=d^2$ を満たすとする.

(1)　d が 3 の倍数でないならば, a, b, c の中に 3 の倍数がちょうど 2 つあることを示せ.

(2)　d が 2 の倍数でも 3 の倍数でもないならば, a, b, c のうち少なくとも 1 つは 6 の倍数であることを示せ.

【テーマ】：倍数と証明

方針

(1) では, 自然数の 2 乗を 3 で割ると余りは, 0 か 1 になることを利用します. (2) では, (1) の結果を踏まえて d が 2 で割り切れないときを考え, 余りに着目した式を立てます.

♣ ♠

解答

$a^2+b^2+c^2=d^2$ …… ①

(1) **【証明】**

一般に自然数 n に対して, k を自然数とすると,

$n=3k$ のとき,　$n^2=9k^2$

$n=3k-1$ のとき,　$n^2=3(3k^2-2k)+1$

$n=3k-2$ のとき,　$n^2=3(3k^2-4k+1)+1$

となり, いずれにしても 3 で割った余りは 0 または 1 となる. d が 3 の倍数でないならば, ① の右辺を 3 で割った余りは 1 となる. 一方, x, y, z を自然数とし, p, q, r を 0 または ± 1 とするとき,

$$a=3x+p,\quad b=3y+q,\quad c=3z+r$$

とおくことができて,

$$a^2+b^2+c^2=3\{3(x^2+y^2+z^2)+2(xp+yq+zr)\}+p^2+q^2+r^2$$

となる. よって, $a^2+b^2+c^2$ を 3 で割った余りは $p^2+q^2+r^2$ であるから,

$$p^2+q^2+r^2=1$$

を満たす. p^2, q^2, r^2 が 0 または 1 であることから, p, q, r のうちちょうど 2 つが 0 であり, 残り 1 つが 1 である. ゆえに, a, b, c の中に 3 の倍数はちょうど 2 つあることが示された. **(証明終)**

(2) **【証明】**

(1) と同様に考えると, 自然数 n に対して, n^2 を 2 で割った余りは 0 または 1 となる. d が 2 の倍数でないならば d^2 を 2 で割った余りは 1 となる. 一方, x', y', z' を自然数とし, p', q', r' を 0 または 1 とするとき,

$$a=2x'+p',\quad b=2y'+q',\quad c=2z'+r'$$

とおくことができて,

$$a^2+b^2+c^2=4(x'^2+y'^2+z'^2+x'p'+y'q'+z'r')+p'^2+q'^2+r'^2$$

となる. よって, $a^2+b^2+c^2$ を 2 で割った余りは $p'^2+q'^2+r'^2$ であるから,

$$p'^2+q'^2+r'^2=1$$

を満たす．p', q', r' が 0 または 1 であることから，p', q', r' のうちちょうど 2 つが 0 であり，残り 1 つが 1 となる．さらに，d が 3 の倍数でないならば，(1) の結果から a, b, c のうちちょうど 2 つが 3 の倍数となるので，a, b, c のうち少なくとも 1 つは 2 かつ 3 の倍数であることが分かる．すなわち少なくとも 1 つは 6 の倍数であることが示された． **(証明終)**

―――――― ♢ ―――――― ♡ ――――――

$\boxed{\text{解説}}$

自然数の 2 乗を 3 で割った余りが 0 または 1 になるのは，よく知られた事実で入試でもよく用いられる知識です．一方 (2) は，余りに着目した等式を作ることがポイントになります．(1) の結果を踏まえて考えれば，a, b, c のうち 2 つが 2 の倍数となることを示せばよいという方針が立つでしょう．

合同式の知識を使えば，もう少し簡潔な解答になりますが，本質的には同じことをしているので，仕組みが理解できればどちらの方法をとっても構いません．

いずれにしても，剰余に関する問題は入試でも頻出なので，類題演習をして免疫をつけておきましょう．