

13 ( '11 茨城大 )

【難易度】…基本

$a, b, c$  は実数の定数で,  $a > 0, b \geq 0$  とする. 実数  $x, y$  に関する条件  $p, q, r$  を次のように定める.

$$p : x^2 + y^2 \leq 1$$

$$q : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq a^2$$

$$r : y \leq \sqrt{b}x + c$$

以下の各問いに答えよ.

- (1) 条件  $q$  が条件  $p$  であるための十分条件となるとき,  $a$  の値の範囲を求めよ.
- (2) 条件  $r$  が条件  $p$  であるための必要条件となるとき,  $b, c$  が満たす条件を求め, それを  $bc$  平面に図示せよ.

【テーマ】: 不等式を満たす領域

**方針**

十分条件と必要条件の関係から包含関係を考えます.

**解答**

- (1) 条件  $p$  を満たす点  $(x, y)$  の集合を  $U_p$  とし, 条件  $q$  を満たす点  $(x, y)$  の集合を  $U_q$  とする. このとき, 条件  $q$  が条件  $p$  であるための十分条件となるためには,

$$U_q \subseteq U_p$$

となればよい.  $x^2 + y^2 = 1$  と  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = a^2$

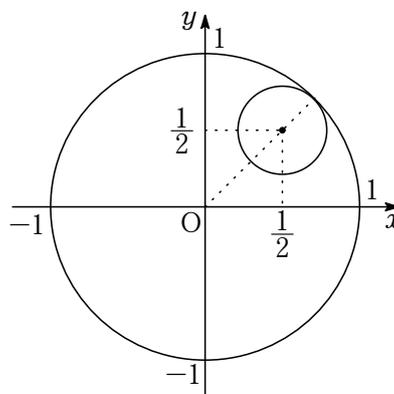
の半径はそれぞれ  $1, a$  であり, 中心間の距離は  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  であるから,

$$1 - a \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \iff a \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

が成り立てばよい. 一方, 題意より  $a > 0$  であるから,

求める  $a$  の値の範囲は,

$$0 < a \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots(\text{答})$$



- (2) 条件  $r$  を満たす点  $(x, y)$  の集合を  $U_r$  とする. 直線  $y = \sqrt{b}x + c$  の傾きは  $0$  以上であり, 条件  $r$  が条件  $p$  であるための必要条件となるためには,

$$U_p \subseteq U_r$$

となればよい. その条件は,

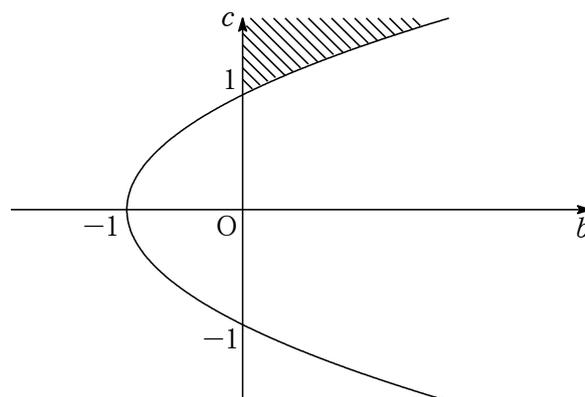
『 $c \geq 1$ 』かつ『原点と直線  $y = \sqrt{b}x + c$  の距離が  $1$  以上』

である. ゆえに,

$$c \geq 1 \text{ かつ } \frac{|c|}{\sqrt{b+1}} \geq 1$$

$$\therefore c \geq 1 \text{ かつ } c^2 \geq b+1 \ (b \geq 0) \dots\dots(\text{答})$$

したがって、 $b, c$  が満たす条件を  $bc$  平面上に図示すると下図の斜線部分となる。ただし、境界線を含む。

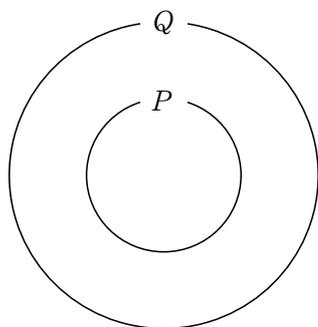


◇

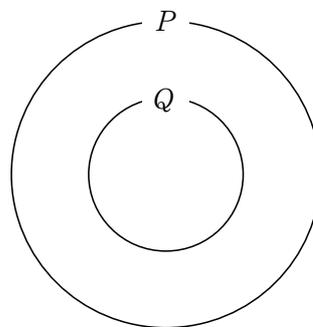
解説

必要条件と十分条件の関係をきちんと理解しておかなければ、まったく異なる解答になります。逆を言えば、それさえ理解できていれば基本的な問題なので、完答が狙えます。

条件  $p, q$  を表す集合をそれぞれ  $P, Q$  とするとき、 $p$  が  $q$  の十分条件であることを示す図は、下左図です。また、 $p$  が  $q$  の必要条件であることを示す図は、下右図です。まずは、この関係をしっかり理解しましょう。例えば、 $p$  を哺乳類として  $q$  を人間とします。この関係を表しているのは、右図です。人間であれば必ず哺乳類ですが、哺乳類だからといって人間とは限りません。つまり、哺乳類は人間であるための必要条件だということになります。とくに、難関大学を目指している人は、包含関係をしっかり把握し、十分条件なのか必要条件なのかをきちんと考える習慣を身につけましょう。



$P$  は  $Q$  であるための十分条件



$P$  は  $Q$  であるための必要条件

『主語 ( $P$ )』が包み込まれている状態 (左図) が十分条件、『主語 ( $P$ )』が他の条件を包み込んでいる状態 (右図) が必要条件と考えるとよいでしょう。