12 （'11　札幌医科大）　**【難易度】** … 標準

1 から n までの番号が書かれた n 個の箱があり，各々の箱には $2n$ 本のくじが入っている．番号が l の箱には l 本の当たりが入っているとする．この条件で次の ①, ② を試行する．

① 無作為に箱を 1 つ選ぶ．

② ① で選んだ箱を用いて，くじを 1 本引いては戻すことを m 回繰り返す．

この試行で k 回当たりくじを引く確率を $p_n(m,\, k)$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(2,\, 0)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(2,\, 1)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(2,\, 2)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(m,\, 1)$ を m を用いて表せ．

【テーマ】：確率と区分求積法

方針

普通に和を計算することもできますが，区分求積法を用いて定積分で計算したほうが楽に求められます．

♣　♠

解答

(1) $p_n(2,\, 0)$ は 2 回くじを引いて当たりが出ない確率であるから，

$$p_n(2,\, 0) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{2n-\ell}{2n}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left(1-\frac{\ell}{2n}\right)^2$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p_n(2,\, 0) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left(1-\frac{\ell}{2n}\right)^2 \\ &= \int_0^1\left(1-\frac{1}{2}x\right)^2 dx \\ &= \left[\frac{-2}{3}\left(1-\frac{1}{2}x\right)^3\right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{2}{3} \\ &= \mathbf{\frac{7}{12}}\cdots\cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

$p_n(2,\, 1)$ は 2 回くじを引いて当たりが 1 回出る確率であるから，

$$p_n(2,\, 1) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{2\ell(2n-\ell)}{(2n)^2} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{\ell}{n}\left(2-\frac{\ell}{n}\right)$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p_n(2,\, 1) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{\ell}{n}\left(2-\frac{\ell}{n}\right) \\ &= \int_0^1\frac{1}{2}x(2-x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} \\ &= \mathbf{\frac{1}{3}}\cdots\cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

$p_n(2,\, 2)$ は 2 回くじを引いて 2 回とも当たる確率であるから，

$$p_n(2,\,2)=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\ell}{2n}\right)^2$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}p_n(2,\,2)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{\ell}{n}\right)^2\\&=\int_0^1\frac{1}{4}x^2\,dx\\&=\left[\,\frac{1}{12}x^3\,\right]_0^1\\&=\boldsymbol{\frac{1}{12}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

（2） （1）と同様に考えると，$p_n(m,\,1)$ は m 回くじを引いて，1 回当たる確率であるから，

$$p_n(m,\,1)=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}{}_m\mathrm{C}_1\frac{\ell(2n-\ell)^{m-1}}{(2n)^m}=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2^m}\cdot\frac{m\ell}{n}\left(2-\frac{\ell}{n}\right)^{m-1}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}p_n(m,\,1)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{m}{2^m}\cdot\frac{\ell}{n}\left(2-\frac{\ell}{n}\right)^{m-1}\\&=\int_0^1\frac{m}{2^m}x(2-x)^{m-1}\,dx\\&=\frac{m}{2^m}\int_0^1(2-(2-x))(2-x)^{m-1}\,dx\\&=\frac{m}{2^m}\int_0^1\left\{2(2-x)^{m-1}-(2-x)^m\right\}\,dx\\&=\frac{m}{2^m}\left[\,\frac{-2}{m}(2-x)^m+\frac{1}{m+1}(2-x)^{m+1}\,\right]_0^1\\&=\frac{m}{2^m}\left(-\frac{2}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{2^{m+1}}{m}-\frac{2^{m+1}}{m+1}\right)\\&=\frac{m}{2^m}\left(\frac{-m-2}{m(m+1)}+\frac{2^{m+1}}{m(m+1)}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{2^{m+1}-m-2}{2^m(m+1)}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

（2）は，（1）と同様の考え方で求められます．（1）での勘違いが致命的になるので，題意を正確に把握して計算をしましょう．区分求積法であることが見抜ければ計算も比較的容易にすみます．（2）では，式がやや複雑になるので，少し技巧的な式変形を行っています．これは，しばしば用いられる式変形なので，できるようにしておくと強力な武器になるでしょう．例としては，

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を証明する際，

$$(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)=(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)$$

と変形することで積分計算が楽になります．