9 （′73　京都大） **【難易度】** … 標準

n は自然数とし

$$f(x)=1+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

とする．このとき，$-1\leqq x\leqq 1$ において $1\leqq f(x)<2$ であることを証明せよ．

【テーマ】：関数がとり得る値の範囲

方針

何から手をつけていいか悩みますが，まずは $f(x)$ を $\sum$ を用いて表してみましょう．

♣ ♠

解答

【証明】

$f(x)-1=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^{k+1}}{k(k+1)}$ より，$-1\leqq x\leqq 1$ で

$$0\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}<1$$

が成り立つことを示せばよい．ここで，$g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^{k+1}}{k(k+1)}$ とおくと，一般に k が 2 以上の偶数のとき，

$$\frac{x^k}{(k-1)k}+\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}=\frac{x^k(k+1+(k-1)x)}{(k-1)k(k+1)}=\frac{(1+x)k+(1-x)}{(k-1)k(k+1)}\geqq 0$$

より，n が偶数のとき，

$$g(x)=\left(\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^5}{4\cdot 5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{x^n}{(n-1)n}+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)\geqq 0$$

であり，n が奇数のとき，

$$g(x)=\left(\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^5}{4\cdot 5}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left(\frac{x^{n-1}}{(n-2)(n-1)}+\frac{x^n}{(n-1)n}\right)+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\geqq 0$$

となるので，いずれにしても $g(x)\geqq 0$ である．また，

$$|g(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}\right|\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{|x|^{k+1}}{k(k+1)}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}<1$$

であるから，$0\leqq g(x)<1$ が示された． **（証明終）**

♢ ♡

解説

関数と数列の融合問題で関数の値を評価する問題です．まず何をするかが問題で，本解答では $g(x)=f(x)-1$ とおくことで，$0\leqq g(x)<1$ を示そうとしています．k が偶数であれば k 次の項と $k+1$ 次の項を加えると必ず 0 以上になることを示し，これを利用して，n が偶数のときと奇数のときで場合分けを行っています．