8 ('97 東京工業大) **【難易度】** … 標準

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ を求めよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$ を求めよ.

【テーマ】: 定積分と極限

方針

(2) では, まず, 定積分を計算することから始めますが, $|\sin x|$ があるため区間を $k\pi \leqq x \leqq (k+1)\pi$ で区切り, k の偶奇で場合分けを行います.

♣ ♠

解答

(1) $I=\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ とおくと,

$$\begin{aligned}I&=\Big[-e^{-x}\sin x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^{-x}\cos x\,dx\\&=\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{-x}\sin x\,dx\end{aligned}$$

$\therefore\ 2I=e^{-\pi}+1$

$\therefore\ I=\boldsymbol{\dfrac{e^{-\pi}+1}{2}}$ ……(**答**)

(2) (1) と同様に, 部分積分を用いることで, 次式を得る.

$$\int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+C\quad (C\text{ は積分定数})$$

$I_n=\displaystyle\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx$ とおき, $J_k=\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx$ とおく.

(i) k が奇数のとき,

$$\begin{aligned}J_k&=-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx\\&=\left[\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)\right]_{k\pi}^{(k+1)\pi}\\&=\frac{e^{-(k+1)\pi}}{2}+\frac{e^{-k\pi}}{2}\\&=\frac{e^{-k\pi}}{2}(e^{-\pi}+1)\end{aligned}$$

(ii) k が偶数のとき,

$$\begin{aligned}J_k&=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx\\&=-\left[\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)\right]_{k\pi}^{(k+1)\pi}\\&=-\left(\frac{-e^{-(k+1)\pi}}{2}-\frac{e^{-k\pi}}{2}\right)\\&=\frac{e^{-k\pi}}{2}(e^{-\pi}+1)\end{aligned}$$

ゆえに, (i), (ii) のいずれにしても

$$J_k = \frac{e^{-k\pi}}{2}(e^{-\pi}+1)$$

となるので，

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{k=0}^{n-1} J_k \\ &= \frac{e^{-\pi}+1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\pi} \\ &= \frac{e^{-\pi}+1}{2}\cdot\frac{1-(e^{-\pi})^{n-1}}{1-e^{-\pi}} \end{aligned}$$

ゆえに，求める極限値は，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} I_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{-\pi}+1}{2}\cdot\frac{1-(e^{-\pi})^{n-1}}{1-e^{-\pi}}\right) \\ &= \frac{e^{-\pi}+1}{2(1-e^{-\pi})} \\ &= \boldsymbol{\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}} \cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

◊ ♡

解説

(1) は，指数関数と三角関数の積の積分なので，同系出現タイプです．$I=$ などと置いて，部分積分法を 2 回行うと，同じ形が出てきます．

(2) は，区間が $0 \leqq x \leqq n\pi$ となっていて，被積分関数に $|\sin x|$ を含んでいるため，$k\pi \leqq x \leqq (k+1)\pi$ での積分を考えます．$\sin x$ の符号が k の偶奇で変わるので，場合分けが必要になります．非常によくあるタイプの積分なので，確実にできるようにしておきましょう．ちなみに，$y=e^{-x}|\sin x|$ のグラフは，次のようになります．このグラフは頻出なので，必ず覚えておきましょう．$y=e^{-x}\sin x$ のグラフは，$y=e^{-x}$ と $y=-e^{-x}$ のグラフに接しながら減衰していきます．減衰曲線とも呼ばれます．本問の場合は，絶対値がついているので，$y=e^{-x}\sin x$ のグラフの x 軸の下方部分を x 軸に関して対称移動することで，下図のようなグラフになります．