**7**　('02　京都大)　**【難易度】**… やや難

半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A, B, C がある.

(1)　$AB^2+BC^2+CA^2>8$ ならば $\triangle ABC$ は鋭角三角形であることを示せ.

(2)　$AB^2+BC^2+CA^2\leqq 9$ が成り立つことを示せ. また, この等号が成り立つのはどのような場合か.

**【テーマ】：三角関数の図形への応用**

方針

(1) は, 辺の長さが直径以下なる点に着目します. (2) は, 具体的に 3 点の座標を三角比を用いて設定すると良いでしょう.

♣　♠

**解答**

(1)　**【証明】**

題意より, AB, BC, CA の長さは直径以下なので,

$$AB\leqq 2,\quad BC\leqq 2,\quad CA\leqq 2$$

よって,

$$\begin{aligned}AB^2+BC^2-CA^2&>8-CA^2-CA^2\\&=8-2CA^2\geqq 0\end{aligned}$$

ゆえに, $AB^2+BC^2>CA^2$ が成り立つことから, $\angle B<90^\circ$ を得る. 同様にすれば, $\angle A<90^\circ$, $\angle C<90^\circ$ を得る. 以上より, $\triangle ABC$ は鋭角三角形であることが示された. **(証明終)**

(2)　**【証明】**

3 点 A, B, C の座標を

$$A(\cos\theta,\ \sin\theta),\quad B(\cos\theta,\ -\sin\theta),\quad C(\cos\alpha,\ \sin\alpha)\quad \left(0<\theta\leqq\frac{\pi}{2},\ 0\leqq\alpha\leqq\pi,\ \theta\neq\alpha\right)$$

とおいても一般性を失わない. このとき, AB の中点を M とすると, $M(\cos\theta,\ 0)$ であり, 中線定理より,

$$AC^2+BC^2=2\left(AM^2+CM^2\right)$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}AB^2+BC^2+CA^2&=AB^2+2\left(AM^2+CM^2\right)\\&=AB^2+2\left(\frac{1}{4}AB^2+CM^2\right)\\&=\frac{3}{2}AB^2+2CM^2\\&=\frac{3}{2}\cdot 4\sin^2\theta+2\left\{(\cos\alpha-\cos\theta)^2+\sin^2\alpha\right\}\\&=6\sin^2\theta+2(1-2\cos\alpha\cos\theta+\cos^2\theta)\\&=4+4\sin^2\theta-4\cos\alpha\cos\theta\\&=8-4\cos^2\theta-4\cos\alpha\cos\theta\\&=8-4(\cos^2\theta+\cos\alpha\cos\theta)\end{aligned}$$

$$= 8 - 4\left\{\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\alpha\right)^2 - \frac{1}{4}\cos^2\alpha\right\}$$
$$\leqq 8 + \cos^2\alpha \leqq 9$$

等号は，$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}\cos\alpha$ かつ $\cos^2\alpha = 1$ のとき，成立する．これは，$\cos\alpha = \pm 1$ であるが，$\cos\theta > 0$ より，$\cos\alpha < 0$ となるので，

$$\cos\alpha = -1, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

より，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $\alpha = \pi$ のときである．すなわち，$\triangle$ABC が正三角形のとき，等号は成立する． **（証明終）**

◇ ♡

**解説**

方針を立てるのに四苦八苦する問題です．このような問題では,『平面幾何の知識を使う』,『座標を設定する』,『ベクトルを用いる』など様々な方法があります．そのどれを用いるかで解答がかなり変わります．本解答では，座標を設定し三角関数の最大値を求めるという問題に帰着させました．