5 （′92　京都大） 【難易度】 … 標準

（1） 直線 $x+y=2$ と円 $x^2+y^2=5$ の交点の座標を求めよ．

（2） 2 つの実数 a, b のうち，大きい方を $\max\{a, b\}$ で表す．（$a=b$ のときは，$\max\{a, b\}=a$ である．）
次の不等式を満たす点 (x, y) の存在する範囲を図示せよ．

$$1 \leqq \max\{4x+4y-3,\ x^2+y^2\} \leqq 5$$

【テーマ】：不等式を満たす領域

方針

$4x+4y-3,\ x^2+y^2$ の大小で場合分けを行います．

♣ ♠

解答

（1） $y=2-x$ より，

$$x^2+(2-x)^2=5 \iff 2x^2-4x-1=0$$

よって，$x=\dfrac{2\pm\sqrt{6}}{2}$ である．このとき，

$$y=2-\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}=\frac{2\mp\sqrt{6}}{2} \quad （複号同順）$$

ゆえに，交点の座標は，

$$\boldsymbol{\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2},\ \frac{2-\sqrt{6}}{2}\right),\ \left(\frac{2-\sqrt{6}}{2},\ \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)}\cdots\cdots（\textbf{答}）$$

（2） $4x+4y-3$ と x^2+y^2 の大小で場合分けを行う．

（ i ） $4x+4y-3 \leqq x^2+y^2$ のとき，

$$x^2-4x+y^2-4y \geqq -3$$

$$\therefore \quad (x-2)^2+(y-2)^2 \geqq 5 \cdots\cdots ①$$

であり，このとき，与えられた不等式は

$$1 \leqq x^2+y^2 \leqq 5 \cdots\cdots ②$$

となるので，①，② の共通部分が求める領域となる．

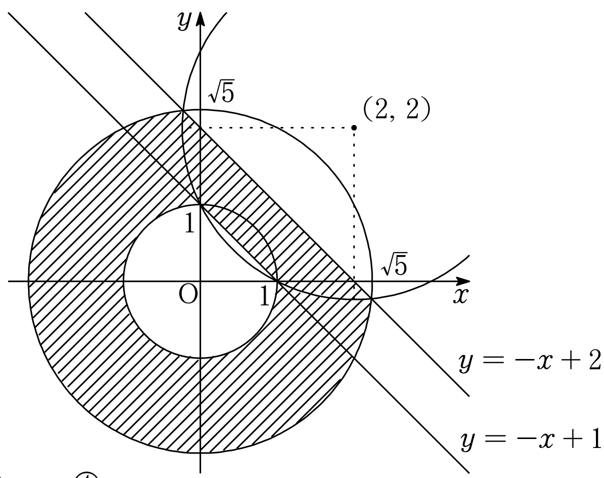
（ii） $4x+4y-3 > x^2+y^2$ のとき，

$$(x-2)^2+(y-2)^2 < 5 \cdots\cdots ③$$

であり，このとき，与えられた不等式は

$$1 \leqq 4x+4y-3 \leqq 5 \iff 1 \leqq x+y \leqq 2 \cdots\cdots ④$$

となるので，③，④ の共通部分が求める領域となる．



ゆえに，（ i ），（ii）より，求める点 (x, y) の存在する領域は，上図斜線部分で境界線を含む．

◇ ♡

解説

$\max\{a, b\}$ は，a と b の大きい方を採用するという意味なので，$a \leqq b$, $a > b$ となるための条件を求める必要があります．また，同様に $\min\{a, b\}$ という関数もあります．これは，小さいほうを採用するという意味です．基本的に，何の説明もなく使われることはないのでその意味を忘れてしまってもあまり困ることはないと思いますが，知っておく方が時間が節約できてよいでしょう．