3 （′79　東京工業大） 【難易度】 … 標準

x の関数 $y=\left(1-\dfrac{a}{2}\cos^2 x\right)\sin x$ の最大値が 1 となるような a の範囲を求めよ．

【テーマ】：三角関数の最大値・最小値

方針

$t=\sin x$ とおいて考えますが，$t=1$ のとき，a の値にかかわらず $y=1$ になることに着目します．

♣ ♠

解答

$$
\begin{aligned}
y &= \left(1-\frac{a}{2}\cos^2 x\right)\sin x\\
&= \left\{1-\frac{a}{2}(1-\sin^2 x)\right\}\sin x
\end{aligned}
$$

ここで，$t=\sin x$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ より，

$$
\begin{aligned}
y &= \left\{1-\frac{a}{2}(1-t^2)\right\}t\\
&= \frac{a}{2}t^3+\left(1-\frac{a}{2}\right)t
\end{aligned}
$$

$f(t)=\dfrac{a}{2}t^3+\left(1-\dfrac{a}{2}\right)t$ とおくと，$f(-1)=-1$，$f(1)=1$ となるので，$-1 \leqq t \leqq 1$ で常に $f(t) \leqq 1$ を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{2}t^3+\left(1-\frac{a}{2}\right)t \leqq 1 \quad \cdots\cdots(*)\\
\iff &\frac{a}{2}t^3+\left(1-\frac{a}{2}\right)t-1 \leqq 0\\
\iff &(t-1)\left(\frac{a}{2}t^2+\frac{a}{2}t+1\right) \leqq 0
\end{aligned}
$$

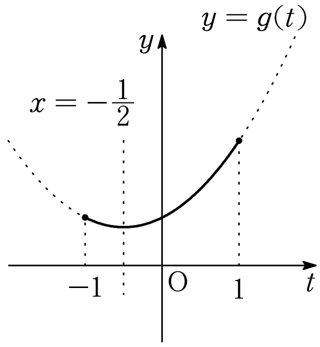
$t-1 \leqq 0$ であるから，$g(t)=\dfrac{a}{2}t^2+\dfrac{a}{2}t+1$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ で常に $g(t) \geqq 0$ であればよい．

$$
g(t)=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{a}{8}+1
$$

（ｉ） $a>0$ のとき，

$-\dfrac{a}{8}+1 \geqq 0$ であればよいので，$a \leqq 8$ を得る．

$$\therefore\quad 0<a \leqq 8$$



（ii） $a=0$ のとき，

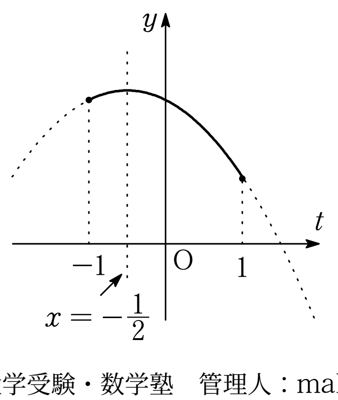
$g(t)=1$ となるので，$t=1$ で最大値 1 をとり，条件に適する．

（iii） $a<0$ のとき，

$g(1) \geqq 0$ であればよいので，

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+1 \geqq 0$$

$$\therefore\quad -1 \leqq a<0$$



以上より，求める a の値の範囲は，

$$-1 \leqq a \leqq 8$$

―――――― ♢ ―――――― ♡ ――――――

$\boxed{\text{解説}}$

置き換えをして，t の 3 次関数にするのは定石ですが，本問では $y = f(t)$ が定点 $(-1, -1)$, $(1, 1)$ を通ることが重要なポイントになります．$t = 1$ で $y = 1$ となることが分かっているので，$-1 \leqq t \leqq 1$ で常に $f(t) \leqq 1$ となるような a の値の範囲を求めればよいことになります．よって，$(*)$ の不等式を考えればよく最終的には，2 次関数のグラフを使って処理できるようになります．