2 ('10 愛媛大) **【難易度】** … 標準

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は，すべての自然数 n について

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{1-{b_n}^2},\quad b_{n+1}=a_{n+1}b_n$$

をみたしているとする．

(1) 初項が $a_1=b_1=\frac{1}{2}$ であるとする．

(i) a_2, b_2, a_3, b_3 を求めよ．

(ii) a_n, b_n を表す n の式を推定し，それらの推定が正しいことを数学的帰納法によって証明せよ．

(2) 初項が $a_1=\frac{1}{2010}$, $b_1=\frac{2009}{2010}$ であるとする．

(i) $a_{n+1}+b_{n+1}$ を a_n, b_n で表せ．

(ii) a_n+b_n を求めよ．

【テーマ】：連立漸化式

方針

(1) の帰納法での証明は，a_n, b_n を同時に行います．(2)(ii) では，答えを予測することから始めましょう．

♣ ♠

解答

(1) (i) 与えられた漸化式より，

$$a_2=\frac{a_1}{1-{b_1}^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

$$b_2=a_2b_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

$$a_3=\frac{a_2}{1-{b_2}^2}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

$$b_3=a_3b_2=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(ii) (i) より，

$$a_n=\frac{n}{n+1},\quad b_n=\frac{1}{n+1}$$

と推定できるので，これが正しいことを数学的帰納法を用いて示す．

【証明】

① $n=1$ のとき，条件より成立．

② $n=k$ のとき，

$$a_k=\frac{k}{k+1},\quad b_k=\frac{1}{k+1}$$

であると仮定する．このとき，与えられた漸化式より，

$$a_{k+1}=\frac{a_k}{1-{b_k}^2}=\frac{\frac{k}{k+1}}{1-\frac{1}{(k+1)^2}}=\frac{k(k+1)}{(k+1)^2-1}=\frac{k+1}{k+2}$$

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= a_{k+1}b_k \\ &= \frac{k+1}{k+2}\cdot\frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{k+2} \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する．

ゆえに，すべての自然数 n に対して，成り立つことが示された． **（証明終）**

（2）（ｉ）

$$\begin{aligned} a_{n+1}+b_{n+1} &= a_{n+1}+a_{n+1}b_n \\ &= a_{n+1}(1+b_n) \\ &= \frac{a_n}{1-{b_n}^2}(1+b_n) \\ &= \frac{a_n}{(1-b_n)(1+b_n)}(1+b_n) \\ &= \boldsymbol{\frac{a_n}{1-b_n}}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

（ii） $a_n+b_n=1$ と推定する．これが正しいことを数学的帰納法で示す．

【証明】

① $n=1$ のとき，

$$a_1+b_1=\frac{1}{2010}+\frac{2009}{2010}=1$$

より，成り立つ．

② $n=k$ のとき，

$$a_k+b_k=1$$

であると仮定する．このとき,（ｉ）の結果から,

$$\begin{aligned} a_{k+1}+b_{k+1} &= \frac{a_k}{1-b_k} \\ &= \frac{a_k}{a_k} \quad (\because \quad a_k=1-b_k) \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する．

ゆえに，すべての自然数 n に対して，成り立つことが示された． **（証明終）**

$$\therefore \quad a_n+b_n=\mathbf{1}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

（1）は，漸化式を利用して具体的に計算をすることで，a_{n+1} を求めたあと，b_{n+1} が求まることを理解しておきます．この経験を生かして（ii）で数学的帰納法による証明をする際，a_k, b_k を同時に仮定し，a_{k+1}, b_{k+1} の順で示さなければならないという方針が立つのです．

（2）は，与えられた漸化式を用いれば（ｉ）は比較的すんなり求めることができますが,（ii）で答えの予測を立てて帰納法で示すという方針が立たなければ難しく感じるでしょう．（ｉ）で求めた漸化式から a_n+b_n を求めることはできないため,（1）での結果と（2）で与えられた初項から予測しなければならなくなります．