38 （'96　京都大） **【難易度】** … 標準

正の実数 a に対し，実数全体で定義される関数 $g(x)$ を

$$g(x)=\int_{-2}^{2}|x-t|(t^2-a^2)\,dt$$

で定める．このとき，$g(x)$ が最小値を持つような a の範囲を求めよ．また a がそのような範囲にあるとき，$g(x)$ の最小値を a を用いて表せ．

【テーマ】：定積分と最大最小

方針

定積分の計算を行うために，絶対値をはずすことからはじめましょう．

解答

（ⅰ） $x<-2$ のとき，

$$\begin{aligned}
g(x)&=\int_{-2}^{2}(t-x)(t^2-a^2)\,dt\\
&=\int_{-2}^{2}(t^3-xt^2-a^2t+a^2x)\,dt\\
&=2\int_{0}^{2}(-xt^2+a^2x)\,dt\\
&=2\Big[-\frac{x}{3}t^3+a^2xt\Big]_0^2\\
&=\Big(4a^2-\frac{16}{3}\Big)x
\end{aligned}$$

（ⅱ） $-2\leqq x\leqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
g(x)&=\int_{-2}^{x}(x-t)(t^2-a^2)\,dt-\int_{x}^{2}(x-t)(t^2-a^2)\,dt\\
&=\int_{-2}^{x}(-t^3+xt^2+a^2t-a^2x)\,dt-\int_{x}^{2}(-t^3+xt^2+a^2t-a^2x)\,dt\\
&=\Big[-\frac{1}{4}t^4+\frac{x}{3}t^3+\frac{a^2}{2}t^2-a^2xt\Big]_{-2}^{x}-\Big[-\frac{1}{4}t^4+\frac{x}{3}t^3+\frac{a^2}{2}t^2-a^2xt\Big]_{x}^{2}\\
&=\frac{1}{6}x^4-a^2x^2-4a^2+8
\end{aligned}$$

（ⅲ） $x>2$ のとき，

$$\begin{aligned}
g(x)&=\int_{-2}^{2}(x-t)(t^2-a^2)\,dt\\
&=-\Big(4a^2-\frac{16}{3}\Big)x\quad(\because\ (\text{ⅰ}))
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$g(x)=\begin{cases}\Big(4a^2-\dfrac{16}{3}\Big)x & (x<-2)\\ \dfrac{1}{6}x^4-a^2x^2-4a^2+8 & (-2\leqq x\leqq 2)\\ -\Big(4a^2-\dfrac{16}{3}\Big)x & (x>2)\end{cases}$$

ここで，$4a^2-\dfrac{16}{3}>0$ ならば，$x<-2$ で $g(x)$ は単調増加し，$x>2$ で $g(x)$ は単調減少するため，$g(x)$ は最小値を持たないので，$g(x)$ が最小値を持つためには，$4a^2-\dfrac{16}{3}\leqq 0$ であることが必要．このとき，

$$4a^2-\frac{16}{3}\leqq 0 \iff a^2\leqq\frac{4}{3}$$

$$\therefore\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\leqq a\leqq\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$a>0$ であるから,

$$0<a\leqq\frac{2}{\sqrt{3}}$$

逆にこのとき，最小値をとるとすれば，$-2\leqq x\leqq 2$ でとるので，この区間において,

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{1}{6}x^4-a^2x^2-4a^2+8\\&=\frac{1}{6}(x^2-3a^2)^2-\frac{3}{2}a^4-4a^2+8\end{aligned}$$

より，$x=\pm\sqrt{3}a$ のとき，最小値 $-\frac{3}{2}a^4-4a^2+8$ をとる．以上より，$g(x)$ が最小値をとるための a の範囲とそのときの最小値は,

$$\boldsymbol{0<a\leqq\frac{2}{\sqrt{3}}}$$，**最小値 ：** $\boldsymbol{-\frac{3}{2}a^4-4a^2+8}$**……(答)**

◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

絶対値をはずす方法として，次のようなグラフを考える方法があります．まず，積分変数を横軸にとって，絶対値の中身の関数のグラフをかきます．本問の場合，積分変数は t で絶対値の中は $x-t$ なので，x を定数とみなして，$y=x-t$ のグラフをかきます.

次に，t 軸との交点を書き込み，積分区間を書き入れます．その際，問題文に x の範囲が書かれていればそれにしたがいます．もちろん場合分けが必要になることもあります．本問は，x の範囲が書かれていないので，場合分けが必要になります．x と $-2, 2$ の位置関係で 3 通りに分ける必要があるというわけです.