36 （′01　一橋大） **【難易度】** … 標準

放物線 $y=x^2$ 上に，直線 $y=ax+1$ に関して対称な位置にある異なる 2 点 P, Q が存在するような a の範囲を求めよ.

【テーマ】：放物線と直線

方針

P, Q の座標を設定し，その 2 点が $y=ax+1$ に関して対称になるための条件を考えます.

♣ ♠

解答

P$(p,\,p^2)$, Q$(q,\,q^2)$ とおく．これら 2 点が $y=ax+1$ に関して対称となるための条件を考える.
線分 PQ の中点 $\left(\dfrac{p+q}{2},\,\dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$ が $y=ax+1$ 上にあることから,

$$\frac{p^2+q^2}{2}=a\cdot\frac{p+q}{2}+1 \iff p^2+q^2=a(p+q)+2 \cdots\cdots ①$$

また，直線 PQ と $y=ax+1$ が直交するので，直線 PQ の傾きが $-\dfrac{1}{a}$ となることから

$$\frac{p^2-q^2}{p-q}=-\frac{1}{a} \iff p+q=-\frac{1}{a} \cdots\cdots ②$$

① より,

$$(p+q)^2-2pq=a(p+q)+2$$

$$\frac{1}{a^2}-2pq=1 \quad (\because\ ②)$$

$$\therefore\ pq=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-1\right) \cdots\cdots ③$$

②, ③ より，$p,\,q$ を 2 解とする 2 次方程式は,

$$x^2+\frac{1}{a}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-1\right)=0$$

$$2a^2x^2+2ax+1-a^2=0$$

題意を満たすためには，この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解を持てばよいので，判別式を D とすると,

$$D/4=a^2-2a^2(1-a^2)>0$$

$a^2>0$ であるから,

$$-1+2a^2>0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a<-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}<a}\cdots\cdots\textbf{（答）}$$

♢ ♡

解説

P, Q の x 座標を設定してこれら 2 点が直線 $y=ax+1$ に関して対称になるような $p,\,q$ の条件を求めます.
それが ①, ② です．このような 2 点が存在するためには，$p,\,q$ が存在しないといけないので，$p+q$, pq の値から 2 次方程式を作って，実数条件を利用することで a の範囲を求めます.