35 （′98　京都大） **【難易度】** … 標準

自然数 n に対し，$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n 2\theta \sin^3\theta \, d\theta$ とする．

(1) I_2 の値を求めよ．

(2) xy 平面上で原点 O から点 P$(x,\, y)$ への距離を r，x 軸の正の方向と半直線 OP のなす（弧度法による）角を θ とする．方程式 $r = \sin 2\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線を，直線 $y = x$ の周りに回転して得られる曲面が囲む立体の体積を V とするとき，$V = 3\pi I_3 + 2\pi I_2$ と表されることを示せ．

【テーマ】：回転体の体積

方針

(1) は，定積分の計算をするだけです．置換積分を利用するとよいでしょう．(2) 回転軸を x 軸にすることを考えましょう．

♣ ♠

解答

(1)

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \sin^3\theta \, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2\theta - 1)^2 (1 - \cos^2\theta) \sin\theta \, d\theta$$

ここで，$\cos\theta = t$ とおくと，$-\sin\theta d\theta = dt$ であり，右表より，

θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$
t	$1 \to \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (2t^2 - 1)^2 (1 - t^2) \, dt$$
$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (-4t^6 + 8t^4 - 5t^2 + 1) \, dt$$
$$= \left[-\frac{4}{7}t^7 + \frac{8}{5}t^5 - \frac{5}{3}t^3 + t \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}$$
$$= -\frac{4}{7} + \frac{8}{5} - \frac{5}{3} + 1 - \left(-\frac{4}{7 \cdot 8\sqrt{2}} + \frac{8}{5 \cdot 4\sqrt{2}} - \frac{5}{3 \cdot 2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{38 - 26\sqrt{2}}{105}} \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(2) **【証明】**

与えられた曲線を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転移動すると，

$$r = \sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\theta \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\right)$$

となる．よって，この曲線を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積が V となる．

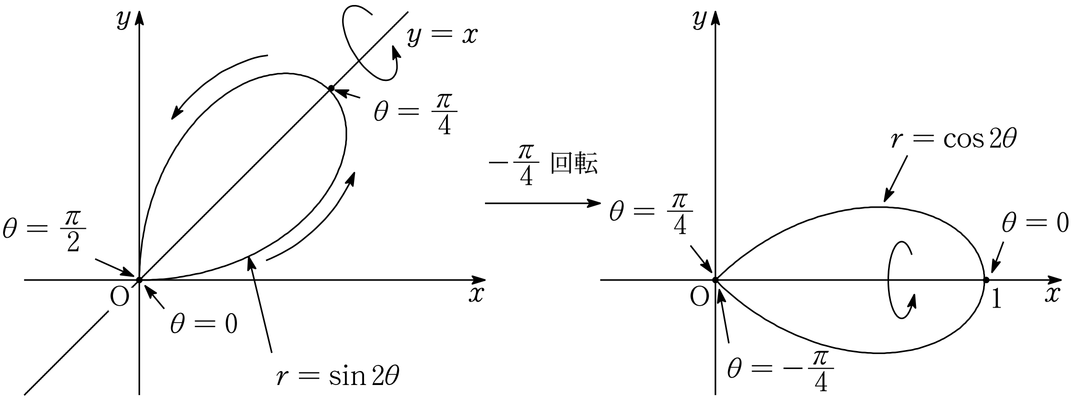
$$r(\theta) = \cos 2\theta \text{ とすると，} r(-\theta) = \cos 2(-\theta) = \cos 2\theta = r(\theta)$$

であるから，この曲線は x 軸に関して対称となる．

$$x = r\cos\theta = \cos 2\theta \cos\theta, \quad y = r\sin\theta = \cos 2\theta \sin\theta$$

であり，

$$\frac{dx}{d\theta} = -2\sin 2\theta \cos\theta - \cos 2\theta \sin\theta$$



より，求める体積 V は,

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^1 y^2\,dx \\
&= \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \cos^2 2\theta\sin^2\theta(-2\sin 2\theta\cos\theta-\cos 2\theta\sin\theta)\,d\theta \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta\sin^2\theta(4\sin\theta\cos^2\theta+\cos 2\theta\sin\theta)\,d\theta \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta\sin^3\theta(3\cos 2\theta+2)\,d\theta \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3\cos^3 2\theta\sin^3\theta+2\cos^2 2\theta\sin^3\theta)\,d\theta \\
&= 3\pi I_3+2\pi I_2
\end{aligned}
$$

ゆえに，示された. **（証明終）**

◇ ♡

解説

(1) は，$\cos\theta = t$ と置換することで t の多項式になります．三角関数を多項式に置換するときは，偶数乗の方を t とおくとうまくいくことが多いです.

(2) は，極座標表示された曲線の回転体の体積で，しかも斜軸回転体です．まずは，回転軸を x 軸にすることを考えましょう．そうすることで考えやすくなります．また，極座標表示された曲線の回転体の体積の計算の仕方なども確認しておきましょう.