

35 ('98 京都大)

【難易度】…標準

自然数 n に対し, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n 2\theta \sin^3 \theta d\theta$ とする.

(1) I_2 の値を求めよ.

(2) xy 平面上で原点 O から点 $P(x, y)$ への距離を r , x 軸の正の方向と半直線 OP のなす (弧度法による) 角を θ とする. 方程式 $r = \sin 2\theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) で表される曲線を, 直線 $y = x$ の周りに回転して得られる曲面が囲む立体の体積を V とするとき, $V = 3\pi I_3 + 2\pi I_2$ と表されることを示せ.