33 （′99　一橋大） **【難易度】** … 標準

曲線 $y = x^3 + ax^2 + b$ は直線 $l : y = -x + 3$ と第 1 象限の点 P で交わり，P における曲線の接線と l は直交する．

（1） a の範囲を求めよ．

（2） b の範囲を求めよ．

【テーマ】：接線と法線

方針

点 P の x 座標を t とおいて，題意を満たすように式を作ります．

解答

（1） $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ とおき，点 P が直線 l 上にあるので，$\mathrm{P}(t, -t+3)$ とおく．このとき，点 P は第 1 象限にあることから $0 < t < 3$ である．

点 P における接線が直線 l と直交するので，点 P における接線の傾きは 1 となる．したがって，

$$f'(t) = 1 \iff 3t^2 + 2at - 1 = 0 \cdots\cdots ①$$

ここで，① が $0 < t < 3$ の間に実数解をもてばよい．$f(0) = -1 < 0$ であるから，$0 < t < 3$ の間に実数解をもつための条件は，

$$f(3) > 0$$

ゆえに，

$$27 + 6a - 1 > 0 \iff \boldsymbol{a > -\frac{13}{3}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

（2） a が (1) の条件を満たせば，① は $0 < t < 3$ の間に実数解をもつ．これに加えて，曲線 $y = f(x)$ が点 P を通れば，題意の条件はすべて満たされるので，

$$t^3 + at^2 + b = -t + 3 \iff t^3 + at^2 + t + b - 3 = 0$$

ここで，① より，$at = \dfrac{1 - 3t^2}{2}$ であるから，

$$t^3 + t \cdot \frac{1 - 3t^2}{2} + t + b - 3 = 0$$
$$\therefore \ b = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t + 3$$

$g(t) = \dfrac{1}{2}t^3 - \dfrac{3}{2}t + 3$ とおいて，$0 < t < 3$ において，$g(t)$ のとり得る値の範囲を求めればよい．

$$g'(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}$$

であるから，$g'(t) = 0$ のとき，$t = 1$ $(\because \ 0 < t < 3)$．よって，増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	3	↘	2	↗	12

ゆえに，b のとり得る値は，$\boldsymbol{2 \leqq b < 12} \cdots\cdots$(**答**)

―――――――― ♢ ―――――――― ♡ ――――――――

解説

(1) で, l が点 P における曲線の法線になる条件から a の範囲を求め, (2) で, $y = f(x)$ と l が点 P で交わることから b の範囲を求めます. 少し考えにくいかもしれませんが, b の範囲を出すときは, ① で a を消去して t の式を作るところがポイントです. あとは, 点 P が第 1 象限にあるという条件から t の範囲を求めておくことを忘れないようにしましょう.