32 ('07 宮崎大) **【難易度】** … やや難

次の各問いに答えよ.

(1) $x \geqq 1$ のとき, 不等式 $\log x < 2\sqrt{x}$ が成り立つことを示せ. ただし, $\log x$ は x の自然対数を表す.

(2) n を自然数とするとき, 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ.

(3) n を自然数とするとき,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin x)^n\,dx\right\}^{\frac{1}{n}} = 3$$

であることを示せ.

【テーマ】: 定積分と不等式

方針

(1) は微分を利用すれば示せます. (2) は, はさみうちの原理を利用しましょう. (3) もはさみうちの原理を利用しますが難問です.

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

$f(x) = 2\sqrt{x} - \log x$ とおくと,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

$x \geqq 1$ のとき, $f'(x) \geqq 0$ である. ゆえに, $y = f(x)$ は単調増加である.

$$f(1) = 2 - \log 1 = 2 > 0$$

より, $x \geqq 1$ で $f(x) > 0$ となり, 題意は示された. **(証明終)**

(2) n は自然数であるから, $\log(n+1) > 0$ である.

$$\therefore\ \frac{1}{n}\log(n+1) > 0 \cdots\cdots ①$$

が成り立つ. ここで, $n+1 \geqq 2$ より, (1) の結果が使えて,

$$\log(n+1) < 2\sqrt{n+1} \cdots\cdots ②$$

が成り立つので, ①, ② より,

$$0 < \frac{1}{n}\log(n+1) < \frac{2\sqrt{n+1}}{n} = 2\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$n \to \infty$ のとき, $2\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} \to 0$ であるから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1) = 0 \iff \lim_{n\to\infty}\log(n+1)^{\frac{1}{n}} = 0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}} = \mathbf{1} \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(3) **【証明】**

$y = \sin x$ のグラフは, $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において, 上に凸であるから, 2 点 $(0, 0)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ を結ぶ線分を考える

と，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，次式が成り立つ.

$$\frac{2}{\pi}x \leqq \sin x \leqq 1$$

各辺正であるから，

$$\left(2+\frac{2}{\pi}x\right)^n \leqq (2+\sin x)^n \leqq 3^n$$

したがって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2+\frac{2}{\pi}x\right)^n dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\sin x)^n\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3^n\,dx \cdots\cdots ①$$

ここで，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2+\frac{2}{\pi}x\right)^n dx &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\left[\left(2+\frac{2}{\pi}x\right)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n+1}(3^{n+1}-2^{n+1}) \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{3^{n+1}}{n+1}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}\end{aligned}$$

ここで，(2) の結果を用いると，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2+\frac{2}{\pi}x\right)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{3\cdot 3^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= 3\end{aligned}$$

さらに，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3^n\,dx\right\}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 3\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 3$$

よって，① において，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\sin x)^n\,dx\right\}^{\frac{1}{n}} = 3$$

であることが示された. **(証明終)**

◇ ♡

(1), (2) は，標準的な問題ですが，(3) は様々な工夫が必要なため，やや難しいでしょう．完答できなかったとしても部分点を稼ぐ答案作りを心がけましょう．ポイントは $\dfrac{2}{\pi} \leqq \sin x \leqq 1$ という不等式を母体としてはさみうちの原理が使える形に式変形する点にあります.