31 （'05　名古屋大） 【難易度】… 標準

（1） 連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi-x)=f(x)$ をみたすとき，

$$\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$$

が成り立つことを証明せよ．

（2） $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx$ を求めよ．

【テーマ】：対称性を利用した定積分の計算

方針

$t=\pi-x$ とおいて，置換積分を行います．(2) は (1) を利用すればよいので，どの部分が $f(x)$ に対応するかを考えます．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

$t=\pi-x$ とおくと，$dt=-dx$ で，
x と t の対応は右表のようになるので，

x	$0 \to \pi$
t	$\pi \to 0$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx &= \int_{\pi}^{0}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)f(\pi-t)\,(-dt)\\ &= -\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)f(\pi-t)\,dt\\ &= -\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(\pi-x)\,dx\\ &= -\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx \quad (\because\ \ f(\pi-x)=f(x))\end{aligned}$$

よって，$2\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$ を得るので，$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$ が示された． **（証明終）**

（2） （1）より，次式が成り立つ．

$$\int_0^{\pi}xf(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(x)\,dx \cdots\cdots ①$$

$f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}$ とおくと，

$$f(\pi-x)=\frac{\sin^3(\pi-x)}{4-\cos^2(\pi-x)}=\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}=f(x)$$

となり，$f(\pi-x)=f(x)$ が成り立つ．よって，① 式が利用できるので，

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx$$

が成り立つ．ここで，

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx$$

とする．$u=\cos x$ とおくと，$du=-\sin x dx$ で，
x と u の対応は右表のようになるので，

x	$0 \to \pi$
u	$1 \to -1$

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{4-\cos^2 x}\,(\sin x dx) \\
&= \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{1-u^2}{4-u^2}\,(-du) \qquad (☜\ \sin^2 x = 1-\cos^2 x) \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{3}{4-u^2}\right)du \qquad \left(☜\ \frac{1-u^2}{4-u^2} = \frac{(4-u^2)-3}{4-u^2}\right) \\
&= \pi\int_0^1\left(1-\frac{3}{4-u^2}\right)du \qquad (☜\ \text{被積分関数が偶関数だから}) \\
&= \pi - 3\pi\int_0^1 \frac{1}{(2-u)(2+u)}\,du \\
&= \pi - \frac{3}{4}\pi\int_0^1\left(\frac{1}{2-u}+\frac{1}{2+u}\right)du \\
&= \pi - \frac{3}{4}\pi\Big[-\log|2-u| + \log|2+u|\Big]_0^1 \\
&= \pi - \frac{3}{4}\pi\cdot\log 3 \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{4}(4-3\log 3)}\text{……(答)}
\end{aligned}
$$

◇ ♡

解説

様々な大学で類題が出題されている問題なので，必ず経験しておきたい問題です．一度経験していれば方針が立つので，後は計算力さえあれば完答できるでしょう．

この問題の流れは，そのままでは定積分が困難な関数を定積分しやすい関数に変換することで，定積分の値を求めることです．そのために (1) のような式を証明させています．(2) では，この式を

$$\int_0^{\pi} xf(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

という形に変形して使うことになります．これは，x を $\frac{\pi}{2}$ に変えても定積分の値は変わらないことを表しているので，この式をヒントにして $f(x)$ を決定するわけです．ただし，この式を使うためには (1) の問題文にもあるように $f(\pi - x) = f(x)$ という関係式が成り立っていなければいけないので，その確認を怠れば減点されるので，注意しましょう．