30 （′69　名古屋大）　**【難易度】** … 標準

$a(>1)$ を奇数，$m(>1)$ を整数とするとき，次のことを証明せよ．

（1）m が偶数ならば a^m+1 は 4 で割り切れない．

（2）m が奇数ならば a^m+1 は 1 より大きな奇数で割り切れる．

【テーマ】：整数問題

方針

偶奇に着目します．様々な解答方法があるので，別解を考えるとよいでしょう．余りに着目すればよいので，合同式を用いても証明できます．

♣ ♠

解答

（1）**【証明】**

m は偶数であるから，k を自然数とすると $m=2k$ とおくことができる．また，a は奇数であるから ℓ を自然数として，$a=2\ell-1$ とおくことができる．このとき，

$$a^m+1=(2\ell-1)^{2k}+1=(4\ell^2-4\ell+1)^k+1$$

このとき，二項定理より，

$$(4\ell^2-4\ell+1)^k=\{4(\ell^2-\ell)+1\}^k=\sum_{r=0}^{k-1}{}_k\mathrm{C}_r\{4\ell(\ell-1)\}^{k-r}+1$$

となるので，4 で割ると 1 余る．

したがって，a^m+1 を 4 で割ると 2 余るので，4 で割り切れないことが示された．**（証明終）**

別解

(解)① 次のように式変形しても証明できます．

k を自然数とする．m は偶数であるから，$m=2k$ とおくことができる．このとき，

$$a^m+1=a^{2k}-1+2=(a^k+1)(a^k-1)+2$$

a は奇数であるから，$a^k+1,\ a^k-1$ はともに偶数となるので，$(a^k+1)(a^k-1)$ は 4 の倍数である．

したがって，a^m+1 は 4 で割り切れないことが示された．**（証明終）**

(解)② さらに，合同式を利用しても証明できます．

a,b を 4 で割った余りが等しいとき，$a\equiv b$ と表すこととする．m は偶数であるから，k を自然数とすると，$m=2k$ とおくことができ，a は奇数であるから ℓ を自然数として，$a=2\ell-1$ とおくことができる．

このとき，

$$a^m+1=(2\ell-1)^{2k}+1=(4\ell^2-4\ell+1)^k+1\equiv 1+1=2$$

したがって，a^m+1 は 4 で割り切れないことが示された．**（証明終）**

(2) **【証明】**

m は奇数であるから，

$$\begin{aligned} a^m+1 &= (a+1)(a^{m-1}-a^{m-2}+a^{m-3}-a^{m-4}+\cdots\cdots+a^2-a+1) \\ &= (a+1)\{a^{m-2}(a-1)+a^{m-4}(a-1)+\cdots\cdots+a(a-1)+1\} \\ &= (a+1)\{(a-1)(a^{m-2}+a^{m-4}+\cdots\cdots+a)+1\} \end{aligned}$$

と因数分解することができる．a は奇数であるから，$a+1$, $a-1$ は偶数である．よって，

$$(a-1)(a^{m-2}+a^{m-4}+\cdots\cdots+a)+1$$

は 1 より大きい奇数となるので，a^m+1 は 1 より大きな奇数で割り切れることが示された． **（証明終）**

◇ ♡

解説

(1) は，式変形を用いたり，合同式を用いたりと様々な解法を紹介しました．本解で用いている方法は，二項定理を用いたもので，高校生が思いつきやすい解き方かもしれません．**別解** では，うまく式変形を行えば，楽に証明できるという方法を紹介しました．本解の方法は，合同式を勉強していれば **別解** の合同式の証明と本質的に同じことを行っていることがわかるはずなので，合同式の解法の方が思いつきやすいかもしれませんね．

(2) は，1 より大きい奇数で割り切れることを示すので，1 より大きい奇数を因数に持つことを示します．そこで，因数分解を行いそれを示しましょう．ポイントは，後半のカッコ内において，$(a-1)$ を見つけ出し（偶数）$+1$ という形にすることです．次の因数分解は，必ず知っておきましょう．

(i) n が偶数のとき，

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

(ii) n が奇数のとき，

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots+a^2b^{n-3}-ab^{n-2}+b^{n-1})$$

➾**注** n が偶数のときは，a^n+b^n は因数分解できるとは限りません．例えば，x^2+1 は実数の範囲で因数分解できませんが，x^6+1 は因数分解することができます．

