29 （'99　九州大） 【難易度】… 標準

m を 2 以上の自然数，e を自然対数の底とする．

(1) 方程式 $xe^x - me^x + m = 0$ をみたす正の実数 x の値はただ 1 つであることを示せ．また，その値を c とするとき，$m-1 < c < m$ となることを示せ．

(2) $x > 0$ の範囲で $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^m}$ は $x = c$ で最小となることを示せ．

(3) a_m を (2) で求められる $f(x)$ の最小値とするとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{\log a_m}{m \log m}$ を求めよ．

【テーマ】：微分法と極限値

方針

(1) は，左辺を $g(x)$ とおいて $y = g(x)$ の増減を調べます．(2) は，(1) の結果を用いて示します．(3) では，直接極限を求めることは困難なので，式変形の途中ででてくる $\dfrac{\log c}{\log m}$ の極限をはさみうちの原理を用いて求めます．

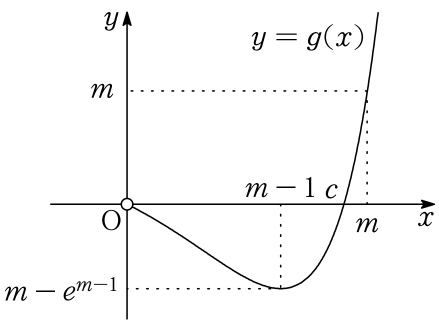
♣　♠

解答

(1) **【証明】**

$g(x) = xe^x - me^x + m$ とおく．$g'(x) = e^x + xe^x - me^x = e^x(x - m + 1)$ であるから，$g'(x) = 0$ のとき，$x = m - 1 \geqq 1$ である．よって，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$m-1$	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$m - e^{m-1}$	$\nearrow$	



$$
\begin{aligned}
g(m-1) &= (m-1)e^{m-1} - me^{m-1} + m \\
&= m - e^{m-1} < 0 \ (\because \ m \geqq 2)
\end{aligned}
$$

であり，さらに，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ であるから，$x > 0$ で $y = g(x)$ は x 軸とただ 1 点で交わるので，$g(x) = 0$ をみたす正の実数 x の値はただ 1 つであることが示された．

また，$g(m-1) < 0$ かつ $g(m) = m > 0$ であるから，$m - 1 < c < m$ であることも示された． **(証明終)**

(2) **【証明】**

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{e^x x^m - (e^x - 1)mx^{m-1}}{x^{2m}} \\
&= \frac{xe^x - me^x + m}{x^{m+1}} \\
&= \frac{g(x)}{x^{m+1}}
\end{aligned}
$$

x	(0)	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	(0)	$\searrow$		$\nearrow$

$f'(x) = 0$ のとき，$g(x) = 0$ であるから増減表は，右のようになる．

ゆえに，$x = c$ で最小となることが示された． **(証明終)**

(3) $a_m = f(c) = \dfrac{e^c - 1}{c^m}$ であり，c は $g(x) = 0$ の解であるから，

$$ce^c - me^c + m = 0 \iff e^c - 1 = \frac{ce^c}{m}$$

ゆえに，$a_m = \dfrac{ce^c}{mc^m}$ を得る．

$$\begin{aligned}
\frac{\log a_m}{m\log m} &= \frac{\log \frac{ce^c}{mc^m}}{m\log m} \\
&= \frac{\log ce^c - \log mc^m}{m\log m} \\
&= \frac{\log c + \log e^c - \log m - m\log c}{m\log m} \\
&= \frac{(1-m)\log c + c - \log m}{m\log m} \\
&= \left(\frac{1}{m} - 1\right)\frac{\log c}{\log m} + \frac{c}{m}\cdot\frac{1}{\log m} - \frac{1}{m} \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

ここで，(1) より，$m-1 < c < m$ が成り立っていることから，

$$m-1 < c < m \iff 1 - \frac{1}{m} < \frac{c}{m} < 1 \quad (\because \ m \geqq 2)$$

となるので，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{c}{m} = 1$ を得る．…… ②

さらに，$m \geqq 2$ より，

$$m-1 < c < m \iff \log(m-1) < \log c < \log m \iff \frac{\log(m-1)}{\log m} < \frac{\log c}{\log m} < 1$$

であり，

$$\frac{\log(m-1)}{\log m} = \frac{\log m\left(1-\frac{1}{m}\right)}{\log m} = \frac{\log m + \log\left(1-\frac{1}{m}\right)}{\log m} = 1 + \frac{\log\left(1-\frac{1}{m}\right)}{\log m}$$

と変形できるので，

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{\log\left(1-\frac{1}{m}\right)}{\log m}\right) = 1 \cdots\cdots ③$$

ゆえに，①〜③ より，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\log a_m}{m\log m} = \mathbf{-1}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(1), (2) は基本問題です．関数の増減を調べて増減表をかけば示すことができます．(3) の極限計算で式変形に少し苦戦するかもしれません．ここで大切なのは，c と m の関係です．(1) で $m-1 < c < m$ という関係式を導いているので，$m \to \infty$ のときは，$c \to \infty$ となります．したがって，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{c}{m} = 0$ などのように c を単なる定数扱いしてしまうのは間違いです．これは不定形なので，解答にもあるようにはさみうちの原理から極限を求めます．これと同様に $\dfrac{\log c}{\log m}$ の極限も不定形なので，はさみうちの原理を用いることになりますが，この式変形も一工夫が必要です．問題は，$\dfrac{\log(m-1)}{\log m}$ をどのように変形するかですが，不定形が回避できるようにしなければならない点に注目して変形をしてみましょう．ちなみに，m が十分大きくなると $\log m \fallingdotseq \log(m-1)$ なので，極限値は 1 なのではないかなと予想することもできます．