28 ('01 一橋大) 【難易度】… 標準

四面体 OAPQ において，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 1$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で，$\angle \mathrm{PAQ} = 30^\circ$ である．

(1) $\triangle$APQ の面積 S を求めよ．

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ のとりうる範囲を求めよ．

(3) 四面体 OAPQ の体積 V の最大値を求めよ．

【テーマ】：四面体の体積

方針

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ なので，O を原点にとれば，A, P, Q は xyz 空間内において軸上に取ることができるので，座標を設定します．

♣ ♠

解答

(1) 題意より，3 点 A, P, Q を xyz 空間において

$$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1),\ \ \mathrm{P}(x,\ 0,\ 0),\ \ \mathrm{Q}(0,\ y,\ 0)$$

とおくことができる．$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ のなす角が 30° より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right| \cos 30^\circ$$

$$(x,\ 0,\ -1) \cdot (0,\ y,\ -1) = \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \ \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdots\cdots ①$$

ゆえに，

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right| \sin 30^\circ = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{6}} \cdots\cdots (\textbf{答})$$

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = x$ より，x のとり得る値の範囲を求める．① より，

$$(x^2+1)(y^2+1) = \frac{4}{3} \cdots\cdots ②$$

であるから，

$$y^2 = \frac{4}{3(x^2+1)} - 1$$

であり，$y^2 > 0$ より，

$$\frac{4}{3(x^2+1)} - 1 > 0 \iff x^2 < \frac{1}{3}$$

$x > 0$ より，$0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である．したがって，$\boldsymbol{0 < \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}} \cdots\cdots (\textbf{答})$

(3) $V = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OPQ} \cdot \mathrm{OA} = \dfrac{1}{6}xy$ である．ここで，② より，

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 = \frac{4}{3} \iff x^2 + y^2 + x^2y^2 = \frac{1}{3}$$

であり，$x^2 > 0$, $y^2 > 0$ より，相加平均・相乗平均の関係から，

$$x^2 + y^2 \geqq 2\sqrt{x^2y^2} = 2xy$$

等号は $x=y$ のとき，すなわち ② より，

$$(x^2+1)^2=\frac{4}{3} \qquad \therefore\ x^2=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

となるので，等号が成立する $x,\,y$ の値は存在する．よって，

$$x^2+y^2 \geqq 2xy \iff x^2+y^2+x^2y^2 \geqq 2xy+x^2y^2$$

であるから，

$$\frac{1}{3} \geqq 2xy+x^2y^2 \iff 3(xy)^2+6xy-1 \leqq 0$$

ゆえに，

$$\frac{-3-2\sqrt{3}}{3} \leqq xy \leqq \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

となり，$xy>0$ より，

$$0<xy \leqq \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \qquad \therefore\ 0<V \leqq \frac{2\sqrt{3}-3}{18}$$

を得るので，V の最大値は，$\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{18}}$……(**答**)

◇ ♡

解説

本問のポイントは，座標空間内に四面体を置くことにあります．その理由は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

という条件があるからです．(1) は，情報が少なく戸惑うかもしれませんが，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|$ の値を一つとみなすことができたかどうかが鍵となります．(2) は (1) で座標を設定していれば，方針も立てやすいでしょう．(3) は，相加平均・相乗平均の関係を用いているので，等号成立条件を忘れずに書いておきましょう．等号はいつも成り立つとは限りませんから，これがないと減点対象となります．また，別解として $x^2+1=t$ と置くことで，

$$y^2=\frac{4}{3t}-1$$

と表せるので，$x,\,y$ の 2 変数を t の 1 変数にすることもできます．ただし，その際新しく置いた文字 t の範囲が $t>1$ であることも述べておきましょう．