27 （′10　大阪大） 【難易度】 … 標準

$a>0$ は定数，θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動く変数とする．xyz 空間で $(a\cos\theta,\, a\sin\theta,\, 0)$ に中心をもち半径が a の球を S とする．さらに，S を zx 平面により二分し y 軸の負の方向にある部分を S_1, S を yz 平面により二分し x 軸の負の方向にある部分を S_2 とする．

（1） S_1 の体積 $V_1(\theta)$ を求めよ．

（2） S から S_1 と S_2 を取り除いた立体の体積を $V(\theta)$ とするとき，$V(\theta)\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ．

【テーマ】：回転体の体積

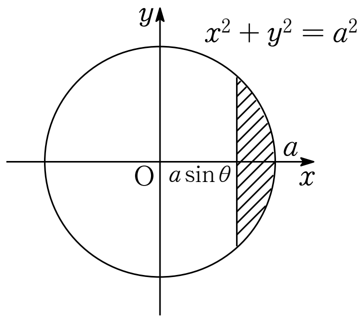
方針

(1) は，求めたい体積を別の回転体に置き換えます．(2) は，(1) を利用すれば方針は容易に立つでしょう．

♣ ♠

解答

（1） S を xy 平面で切り取ったときにできる切断面は，中心 $(a\cos\theta,\, a\sin\theta,\, 0)$ で，半径 a の円である．したがって，S_1 は，xy 平面において中心が原点で半径 a の円において，下図斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積と一致する．よって，



$$
\begin{aligned}
V_1(\theta) &= \int_{a\sin\theta}^{a} \pi y^2\,dx \\
&= \pi\int_{a\sin\theta}^{a}(a^2-x^2)\,dx \\
&= \pi\left[\,a^2x-\frac{1}{3}x^3\,\right]_{a\sin\theta}^{a} \\
&= \pi\left(a^3-\frac{1}{3}a^3-a^3\sin\theta+\frac{1}{3}a^3\sin^3\theta\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{a^3\pi}{3}\left(\sin^3\theta-3\sin\theta+2\right)}\cdots\cdots\text{(答)}
\end{aligned}
$$

（2） （1）と同様に考えると，S_2 は，$x^2+y^2=a^2$ と直線 $x=a\cos\theta$ によって囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積と一致する．よって，

$$
\begin{aligned}
V_2(\theta) &= \pi\int_{a\cos\theta}^{a}(a^2-x^2)\,dx \\
&= \frac{a^3\pi}{3}\left(\cos^3\theta-3\cos\theta+2\right)
\end{aligned}
$$

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
V(\theta) &= \frac{4\pi}{3}a^3-V_1(\theta)-V_2(\theta) \\
&= \frac{4\pi}{3}a^3-\frac{\pi}{3}a^3\left(\sin^3\theta-3\sin\theta+2+\cos^3\theta-3\cos\theta+2\right) \\
&= \frac{\pi}{3}a^3\left\{-\left(\sin^3\theta+\cos^3\theta\right)+3\left(\sin\theta+\cos\theta\right)\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，

$$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

であるから，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ となる．したがって，$1<t\leqq\sqrt{2}$ を得る．

一方，$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ より $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$ であるから，

$$\begin{aligned}\sin^3\theta+\cos^3\theta&=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)\\&=t^3-3\cdot\frac{t^2-1}{2}t\\&=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}V(\theta)&=\frac{\pi}{3}a^3\left(\frac{1}{2}t^3-\frac{3}{2}t+3t\right)\\&=\frac{\pi}{6}a^3(t^3+3t)\end{aligned}$$

ここで，$f(t)=t^3+3t$ とおくと，$f'(t)=3t^2+3>0$ であるから，$t=\sqrt{2}$ で $f(t)$ は最大値をとる．
ゆえに，$t=\sqrt{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$V(\theta)$ は最大値

$$V\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}a^3(2\sqrt{2}+3\sqrt{2})=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{6}\pi a^3}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

をとる．

◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

(1) は，そのまま計算をすると大変なので，同じ体積で計算が簡単な場合に置き換えることがポイントです．円や球がらみの問題では，大切な考え方です．ただし，もともとの図形を 90° 回転させて考えているので，積分区間が $a\cos\theta\leqq x\leqq a$ ではなく，$a\sin\theta\leqq x\leqq a$ となる点に注意しましょう．

(2) は，S_2 の体積も (1) と同じ計算をすれば求まるので，容易に計算できます．実際は $\sin\theta$ が $\cos\theta$ に変わるだけなので，計算の必要はありません．$V(\theta)$ が求まれば，$t=\sin\theta+\cos\theta$ と置き換えをして t の 3 次式に帰着させることは非常によく行う変形なので，確実にできるようにしておきましょう．