26 （′10　広島大） **【難易度】** … 標準

4 で割ると余りが 1 である自然数全体の集合を A とする．すなわち，

$$A = \{4k+1 \mid k \text{ は } 0 \text{ 以上の整数 }\}$$

とする．次の問いに答えよ．

（1） x および y が A に属するならば，その積 xy も A に属することを証明せよ．

（2） 0 以上の偶数 m に対して，3^m は A に属することを証明せよ．

（3） m, n を 0 以上の整数とする．$m+n$ が偶数ならば 3^m7^n は A に属し，$m+n$ が奇数ならば 3^m7^n は A に属さないことを証明せよ．

（4） m, n を 0 以上の整数とする．$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数のうち A に属する数全体の和を m と n を用いて表せ．

【テーマ】：整数問題

方針

剰余に着目して考えます．合同式を知っていると解答が楽に進められるでしょう．

解答

（1） **【証明】**

l, m を 0 以上の整数とすると，$x \in A, y \in A$ より，

$$x = 4l+1,\ \ y = 4m+1$$

と置けるので，

$$xy = (4l+1)(4m+1) = 4(4lm+2l+2m)+1$$

となり，$4lm+2l+2m$ が 0 以上の整数であることから xy は 4 で割ると 1 余る．
したがって，$xy \in A$ となり，題意は示された． **（証明終）**

（2） **【証明】**

k を 0 以上の整数として，$m = 2k$ とおく．ここで，整数 a, b を 4 で割った余りが等しいとき，$a \equiv b$ と書くこととすると，

$$3^m = 3^{2k} = 9^k = (8+1)^k \equiv 1^k = 1$$

が成り立つ．よって，3^m を 4 で割ると 1 余るので，$3^m \in A$ となり，題意は示された． **（証明終）**

（3） **【証明】**

k を 0 以上の整数として，(2) と同様に考えて計算する．

（i） $m+n = 2k$ のとき，

$$3^m7^n = 3^m(4+3)^n \equiv 3^m3^n = 3^{m+n} = 3^{2k}$$

よって，(2) の結果から $3^{m+n} \in A$ となる．

（ii） $m+n = 2k+1$ のとき，

$$3^m7^n \equiv 3^{m+n} = 3^{2k+1} = 3 \cdot 3^{2k} \equiv 3 \quad (\because\ (2))$$

よって，$3^{m+n} \Subset A$ となる．

ゆえに，題意は示された． **（証明終）**

(4)　$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の約数は，

$$(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{2m+1})(7^0+7^1+7^2+\cdots+7^{2n+1})$$

を展開したときの項として現れる．よって，(3) の結果から A の要素となる項の和は，偶数乗同士，奇数乗同士をかけたものを加えればよいことがわかる．したがって，求める和は，

$$\begin{aligned}&(3^0+3^2+\cdots+3^{2m})(7^0+7^2+\cdots+7^{2n})+(3^1+3^3+\cdots+3^{2m+1})(7^1+7^3+\cdots+7^{2n+1})\\&=\frac{(3^2)^{m+1}-1}{3^2-1}\cdot\frac{(7^2)^{n+1}-1}{7^2-1}+\frac{3((3^2)^{m+1}-1)}{3^2-1}\cdot\frac{7((7^2)^{n+1}-1)}{7^2-1}\\&=\frac{(3^{2m+2}-1)(7^{2n+2}-1)}{8\cdot48}+\frac{21(3^{2m+2}-1)(7^{2n+2}-1)}{8\cdot48}\\&=\boldsymbol{\frac{11(3^{2m+2}-1)(7^{2n+2}-1)}{192}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

解説

余りに着目する問題です．複雑そうに見えますが，問われていることはそれほど難しくなく基本的な問題です．ただし，(4) の問題は，約数の総和を求める問題を経験しておく必要があります．一般に素因数分解された数 $2^a3^b5^c\cdots$ の約数の総和は，次式で求められます．

$$(2^0+2^1+\cdots+2^a)(3^0+3^1+\cdots+3^b)(5^0+5^1+\cdots+5^c)\cdots$$

これを知っていることと，(3) の結果が生かせればあとは数列の問題になります．

(2), (3) では合同式を用いて解答しました．解答中では，「整数 a, b を 4 で割った余りが等しいとき，$a \equiv b$ と書くこととする.」としましたが，一般に，整数 a, b を n で割った余りが等しいとき，$a \equiv b \pmod{n}$ と書きます．この合同式の性質としては，次のようなものがあります．

a, b, c, d を整数，n, m を自然数とするとき，$a \equiv b \pmod{n}$ かつ $c \equiv d \pmod{n}$ が成り立つとき，次の関係式が成り立つ．

（i）$a+c \equiv b+d \pmod{n}$　（ii）$a-c \equiv b-d \pmod{n}$

（iii）$ac \equiv bd \pmod{n}$　（iv）$a^m \equiv b^m \pmod{n}$

合同式は加法・減法・乗法に関しては，＝（イコール）の場合と同じ関係が成り立つ．

x, a, b, n を自然数とするとき，次の合同式が成り立つ．

$$(ax+b)^n \equiv b^n \pmod{x}$$

証明は，二項定理を用いて行います．考え方を学ぶのにちょうどよいので，ぜひやってみてください．
詳しくは，《短期集中講座》の整数問題【中級編】を参照してください．