25 （′08　大阪大）　　**【難易度】** … やや難

1 枚の硬貨を繰り返し投げる反復試行を行い，表が 500 回続けて出たときに終わるものとする．n を 500 以上の自然数とするとき，この反復試行が n 回目で終わる確率を $p(n)$ とする．

（1） $501 \leqq n \leqq 1000$ のとき，$p(n)$ は n に関係なく一定の値になることを示し，またその値を求めよ．

（2） $p(1002)-p(1001)$ の値を求めよ．

（3） $1002 \leqq n \leqq 1500$ のとき，$p(n+1)-p(n)$ の値を求めよ．

【テーマ】：確率の基本性質

方針

500 回連続で表が出れば終了するので，終了する 501 回前は必ず裏が出ていなければいけません．そのことに着目することがポイントです．

解答

（1） **【証明】**

$501 \leqq n \leqq 1000$ を満たす n に対し，$n-500$ 回目に裏が出て，次からの 500 回で続けて表が出れば n 回目で試行は終了するので，求める確率は，

$$p(n)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{500}=\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\right)^{501}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

また，これより $p(n)$ は一定であることも示された．　**（証明終）**

（2） $n=1001$ で試行が終了するとき，500 回で試行が終了せず 501 回目で裏が出て，502～1001 までの 500 回すべてが表であればよいので，

$$p(1001)=(1-p(500))\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{500}=(1-p(500))\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{501}$$

また，$n=1002$ で試行が終了するとき，501 回で試行が終了せず 502 回目で裏が出て，503～1002 までの 500 回すべてが表であればよいので，

$$p(1002)=(1-p(500)-p(501))\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{500}=(1-p(500)-p(501))\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{501}$$

したがって，

$$\begin{aligned}p(1002)-p(1001)&=(1-p(500)-p(501))\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{501}-(1-p(500))\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{501}\\&=-p(501)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{501}\\&=\boldsymbol{-\left(\frac{1}{2}\right)^{1002}}\cdots\cdots(\textbf{答})\quad(\because\ (1))\end{aligned}$$

（3） （2）と同様に考える．$1002 \leqq n \leqq 1500$ を満たす n に対して，n 回目に試行が終了するときは，$n-501$ 回で試行が終了せず $n-500$ 回目で裏が出て，次の 500 回がすべて表であればよいので，

$$p(n)=\left(1-\sum_{k=500}^{n-501}p(k)\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{500}$$

ゆえに，

$$p(n+1)-p(n)=\left(1-\sum_{k=500}^{n-501}p(k)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{501}-\left(1-\sum_{k=500}^{n-500}p(k)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{501}$$
$$=-p(n-500)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{501}$$
$$=-\left(\frac{1}{2}\right)^{1002}\cdots\cdots(\text{答})\quad(\because\ (1))$$

◊ ♡

解説

(1) で問題の仕組みを理解する必要があります．500 回連続表が出るということなので，肝心なのは終了する 501 回前に裏が出ていなければならないということです．それ以前は 500 回連続で表が出なければ何が出てもよいということがポイントになります．$501 \leqq n \leqq 1000$ のときは，終了する 501 回目以前は試行が 499 回以下なので，表が 500 回連続で出る心配がないため考える必要がありません．したがって，確率は同じになるというわけです．問題は $n \geqq 1001$ のときです．こうなると終了する 501 回目以前は試行が 500 回以上になりますから，表が 500 回連続で出ないときを考えなければなりません．(2) で取り上げられている $n=1002$ のときに着目して考えてみましょう．試行が終了する 501 回前にあたるのは，502 回目ですから，このときは裏が出なければいけません．さて，このままでは 1 回目～ 501 回目までに表が 500 回連続して出る可能性がありますからその場合を除外する必要があります．解答中でも書いてありますが，501 回までに試行が終了しない確率を求めるということです．試行が終了する可能性があるのは，500 回目と 501 回目で，それぞれ試行が終了する確率は $p(500)$, $p(501)$ ですから，この場合を全体から除けば 501 回までに試行が終了しない確率が求められます．したがって，その確率は

$$1-p(500)-p(501)$$

になります．これを一般化して考えれば (3) はそれほど難しくないでしょう．ここで，注意してもらいたいのは，(3) で $1002 \leqq n \leqq 1500$ となっているのは，$p(n-500)$ の確率が (1) の結果から $\left(\frac{1}{2}\right)^{501}$ になることを用いるためです．$n \geqq 1501$ になると，(2) の様子を見てもわかるように状況が変わってくる点に注意しておきましょう．