24 （'90 大阪大） 【難易度】… 標準

（1） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ を証明せよ．

（2） $0<x<\pi$ のとき $x-\sin x<x(1-\cos x)$ が成り立つことを証明せよ．

（3） $a>0$ とする．曲線 $y=\sqrt{x+a}\sin\dfrac{x}{a}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を $V(a)$ とする．$V(a)$ の値を求めよ．

（4） $\displaystyle\lim_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ．

【テーマ】：回転体の体積

方針

(2) では，$f(x)=x(1-\cos x)-(x-\sin x)$ とおいて $f(x)>0$ を示します．(3) は，部分積分法を用いて体積を計算し，(4) で (1) の結果を用いて極限値を計算します．

♣ ♠

解答

（1） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ ……(**答**)

（2） **【証明】**

$f(x)=x(1-\cos x)-(x-\sin x)$ とおくと，$f(x)=-x\cos x+\sin x$ より，

$$f'(x)=-\cos x+x\sin x+\cos x=x\sin x>0\quad(\because\ 0<x<\pi)$$

よって，$f(x)$ は単調増加である．$f(0)=0$ であるから，$0<x<\pi$ で $f(x)>0$ となり，示された．**(証明終)**

（3） $0\leqq x\leqq 1$ において，$y\geqq 0$ であるから，

$$\begin{aligned}V(a)&=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x+a}\sin\frac{x}{a}\right)^2dx\\&=\pi\int_0^1(x+a)\sin^2\frac{x}{a}\,dx\\&=\pi\int_0^1(x+a)\frac{1-\cos\frac{2}{a}x}{2}\,dx\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^1(x+a)\left(1-\cos\frac{2}{a}x\right)dx\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}&\int_0^1(x+a)\left(1-\cos\frac{2}{a}x\right)dx\\&=\left[\ (x+a)\left(x-\frac{a}{2}\sin\frac{2}{a}x\right)\right]_0^1-\int_0^1\left(x-\frac{a}{2}\sin\frac{2}{a}x\right)dx\\&=(1+a)\left(1-\frac{a}{2}\sin\frac{2}{a}\right)-\left[\ \frac{1}{2}x^2+\frac{a^2}{4}\cos\frac{2}{a}x\right]_0^1\\&=(1+a)\left(1-\frac{a}{2}\sin\frac{2}{a}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{a^2}{4}\cos\frac{2}{a}-\frac{a^2}{4}\right)\\&=1-\frac{a}{2}\sin\frac{2}{a}+a-\frac{a^2}{2}\sin\frac{2}{a}-\frac{1}{2}+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\cos\frac{2}{a}\\&=\frac{1}{2}+\frac{a^2}{4}+a-\frac{a}{2}(1+a)\sin\frac{2}{a}-\frac{a^2}{4}\cos\frac{2}{a}\end{aligned}$$

ゆえに，求める回転体の体積は，

$$\boldsymbol{V(a)=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{a^2}{4}+a-\frac{a}{2}(1+a)\sin\frac{2}{a}-\frac{a^2}{4}\cos\frac{2}{a}\right\}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(4) (3) より，

$$\lim_{a\to\infty}V(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{a^2}{4}+a-\frac{a}{2}(1+a)\sin\frac{2}{a}-\frac{a^2}{4}\cos\frac{2}{a}\right\}$$

ここで，$t=\dfrac{2}{a}$ とおくと，$a\to\infty$ のとき，$t\to+0$ であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}V(a)&=\lim_{t\to+0}\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}-\frac{1}{t}\left(1+\frac{2}{t}\right)\sin t-\frac{\cos t}{t^2}\right\}\\&=\lim_{t\to+0}\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1-\cos t}{t^2}+\frac{2t-(t+2)\sin t}{t^2}\right\}\\&=\lim_{t\to+0}\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1-\cos t}{t^2}+\frac{2(t-\sin t)-t\sin t}{t^2}\right\}\cdots\cdots Ⓐ\end{aligned}$$

ここで，$a\to\infty$ のとき，$t\to+0$ より $0<t<\pi$ で (2) で示した不等式から，

$$\begin{aligned}0\leqq\lim_{a\to\infty}V(a)&<\lim_{t\to+0}\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1-\cos t}{t^2}+\frac{2t(1-\cos t)-t\sin t}{t^2}\right\}\cdots\cdots Ⓑ\\&=\lim_{t\to+0}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1-\cos t}{t^2}+2\cdot\frac{1-\cos t}{t}-\frac{\sin t}{t}\right)\\&=\lim_{t\to+0}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1-\cos t}{t^2}+2\cdot\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sin t}{1+\cos t}-\frac{\sin t}{t}\right)\\&=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0-1\right)=0\quad(\because\ (1))\end{aligned}$$

よって，はさみうちの原理より，$\boldsymbol{\lim_{a\to\infty}V(a)=0}\cdots\cdots(\textbf{答})$

◇ ♡

解説

(1), (2) は基本問題ですから，完答しましょう．(3) は計算がやや複雑なので，計算ミスに注意しましょう．部分積分法を用いますが，答えがあまりきれいにまとまらないので，適当なところで整理しておきましょう．(4) は，(1), (2) の結果を用いて極限値の計算をします．まずは，置き換えを行って (1) が使える形を作ることから始めます．
このような問題の流れは，入試では頻出です．出題者の意図をくみとって解答を作成することは大切ですから，(1), (2) の結果をどこで使ったかを明記する方が印象がよいでしょう．

Ⓐ から Ⓑ への式変形では (2) を用います．$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{t-\sin t}{t^2}$ は不定形なので，このまま答えを出すことはできません．したがって，(2) の不等式を用いて

$$\frac{t-\sin t}{t^2}<\frac{t(1-\cos t)}{t^2}$$

と式変形しているのです．