23 （'10　千葉大） 【難易度】 … 標準

n を正の整数とする．座標平面上の点 $(0,\ -1)$ から曲線 $C_n : y = n(\log x)^2$ に引いた接線の中で，接点の x 座標が最も小さいものを考え，その接点の x 座標を a_n とする．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，$\log x$ は自然対数を表す．

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\log a_n$ の値を求めよ．

(2)　曲線 C_n，直線 $x = a_n$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S_n を n と a_n を用いて表せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(a_n - 1)$ の値を求めよ．

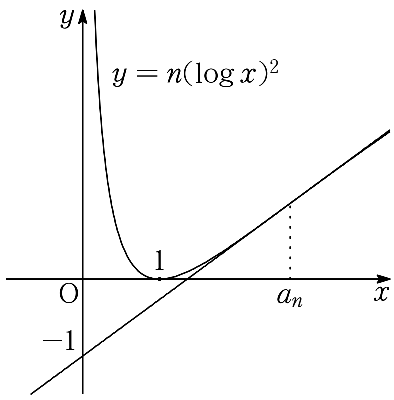
【テーマ】：微分法の応用と数列の極限

方針

(1) は，接線が点 $(0,\ -1)$ を通るという情報から $\log a_n$ を求めることができます．まずは，この極限を考えましょう．(2) は素直に面積を計算しますが，答えの形はできるだけ簡単になるようにすると (3) で方針を立てやすくなります．

♣　♠

解答



(1)　$y' = 2n(\log x)\cdot\dfrac{1}{x}$ より，接線の方程式は，

$$\begin{aligned} y &= \frac{2n\log t}{t}(x-t) + n(\log t)^2 \\ &= \frac{2n\log t}{t}x - 2n\log t + n(\log t)^2 \end{aligned}$$

これが，点 $(0,\ -1)$ を通るとき，

$$-1 = -2n\log t + n(\log t)^2$$

$$n(\log t)^2 - 2n\log t + 1 = 0 \cdots\cdots ①$$

よって，

$$\log t = \frac{n \pm \sqrt{n^2-n}}{n}$$

題意より，$\log a_n = \dfrac{n - \sqrt{n^2-n}}{n}$ である．したがって，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\log a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-n}}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{1}$……(**答**)

さらに，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\log a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(n - \sqrt{n^2-n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n^2+n}{n+\sqrt{n^2-n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \mathbf{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

(2) 求める面積 S_n は,

$$S_n = \int_1^{a_n} n(\log x)^2\,dx \cdots\cdots ②$$
$$= \Big[\, nx(\log x)^2 \,\Big]_1^{a_n} - \int_1^{a_n} nx \cdot 2(\log x) \cdot \frac{1}{x}\,dx$$
$$= na_n(\log a_n)^2 - 2n\int_1^{a_n} \log x\,dx$$
$$= na_n(\log a_n)^2 - 2n\Big[\, x\log x - x \,\Big]_1^{a_n}$$
$$= na_n(\log a_n)^2 - 2n(a_n \log a_n - a_n + 1)$$
$$= na_n(\log a_n)^2 - 2na_n \log a_n + 2na_n - 2n$$

$\log a_n$ は ① より, $n(\log a_n)^2 = 2n\log a_n - 1$ を満たすので,

$$S_n = a_n(2n\log a_n - 1) - 2na_n \log a_n + 2na_n - 2n$$
$$= \boldsymbol{(2n-1)a_n - 2n} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

(3) (2) より, $S_n = 2n(a_n - 1) - a_n$ と変形できて,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \text{ より ② から } \lim_{n\to\infty} S_n = 0$$

が成り立つので,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2n(a_n - 1) - \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$0 = 2\lim_{n\to\infty} n(a_n - 1) - 1$$
$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} n(a_n - 1) = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

◇ ―――― ♡

解説

(1) では, a_n ではなく $\log a_n$ を求めます. 直接 a_n を求めても構いませんが, $\lim_{n\to\infty} \log a_n$ を求めて真数部分の極限を求める手法は大切です. 後半は, 分子の有理化を行えば不定形が回避できます.

(2) では, 具体的に S_n を求めることができるので, 部分積分法を 2 回使って S_n を計算しましょう. ただ, 途中で $(\log a_n)^2$ が出てくるので, (1) の結果を使って次数を下げておいた方が式がシンプルになるので, 減点を避けるためにも形をきれいに整理しておきましょう.

(3) では, (2) で式がきれいに整理できていないと $n(a_n - 1)$ の形が出てこないため方針が立てられません. (1) で求めた極限値を利用することで $\lim_{n\to\infty} n(a_n - 1)$ を求めることができます.