22 （'09　福井大） 【難易度】 … やや難

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ に関して，以下の問いに答えよ．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{n}{(n+1)!} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

（1） 一般項 a_n を求めよ．

（2） 2 以上の自然数 m に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} a_k a_{m-k}$ を求めよ．

（3） 不等式 $\dfrac{(a_n)^2}{a_{2n}} < \dfrac{4^n}{\sqrt{2n+1}}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

【テーマ】：隣接２項間漸化式

方針

(1) は，予想して数学的帰納法で証明するという方法もありますが，うまく式変形することができれば，容易に求められます．(2) は，二項定理が使えるかどうかがポイントになります．(3) は，数学的帰納法で証明しましょう．

♣ ♠

解答

（1） $\dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{n+1-1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$ であるから，与えられた漸化式を変形すると，

$$a_{n+1} = a_n - \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \iff a_{n+1} - \frac{1}{(n+1)!} = a_n - \frac{1}{n!}$$

となるので，

$$a_n - \frac{1}{n!} = a_1 - \frac{1}{1!} = 0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a_n = \frac{1}{n!}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

（2） $m \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(m-k)!} &= \frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{m-1} \frac{m!}{k!(m-k)!} \\
&= \frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k \\
&= \frac{1}{m!}\left(\sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k - {}_m\mathrm{C}_0 - {}_m\mathrm{C}_m\right) \\
&= \frac{1}{m!}\left((1+1)^m - 2\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{2^m - 2}{m!}\ (m \geqq 2)} \cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}$$

（3） **【証明】**

$$\frac{(a_n)^2}{a_{2n}} < \frac{4^n}{\sqrt{2n+1}} \cdots\cdots ①$$

数学的帰納法で証明する．

（ｉ） $n = 1$ のとき，$a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{1}{2}$ であるから，

$$(\text{左辺}) = 2, \quad (\text{右辺}) = \frac{4}{\sqrt{3}} > 2$$

であるから，① は成り立つ．

（ii） $n = k$ のとき，すなわち

$$\frac{(a_k)^2}{a_{2k}} < \frac{4^k}{\sqrt{2k+1}} \iff \frac{(2k)!}{(k!)^2} < \frac{4^k}{\sqrt{2k+1}} \cdots\cdots ②$$

が成り立つと仮定する．② の両辺に $\dfrac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}>0$ をかけて，

$$\frac{\{2(k+1)\}!}{\{(k+1)!\}^2}<\frac{4^k}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}=\frac{2\cdot 4^k\sqrt{2k+1}}{k+1}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\frac{4^{k+1}}{\sqrt{2(k+1)+1}}-\frac{2\cdot 4^k\sqrt{2k+1}}{k+1}&=\frac{2\cdot 4^k\left\{2(k+1)-\sqrt{2k+3}\sqrt{2k+1}\right\}}{\sqrt{2k+3}(k+1)}\\&=\frac{2\cdot 4^k\left(\sqrt{4k^2+8k+4}-\sqrt{4k^2+8k+3}\right)}{\sqrt{2k+3}(k+1)}>0\end{aligned}$$

となるので，

$$\frac{\{2(k+1)\}!}{\{(k+1)!\}^2}<\frac{4^{k+1}}{\sqrt{2(k+1)+1}}$$

が成り立ち，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ．

以上より，数学的帰納法によってすべての自然数 n に対して ① が成り立つことが示された． **（証明終）**

解説

（1）は，予想して帰納法で証明する方法や解答のように式変形する方法，さらには $\{a_n\}$ の階差数列を考える方法など様々な方法があります．

（2）は，式の形から二項定理が想像できたかどうかがポイントになります．

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k a^k b^{n-k}$$

なので，$a=b=1$ として

$$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k=2^n$$

を得ることができます．

（3）は，数学的帰納法で証明しますが，$n=k+1$ のとき成り立つことを示す際に計算がやや複雑なので，計算ミスと解答の書き方に注意しましょう．