21 （′02　大阪大） 【難易度】… 標準

平面上に 3 つの放物線

$$C_1 : y = -x(x-1),\quad C_2 : y = x(x-1),\quad C : y = \frac{1}{2}x^2 + ax + b$$

を考える．いま実数 t に対して，C は C_1 上の点 $(t,\ -t^2+t)$ を通り，その点で C_1 と共通の接線をもつとする．

(1) a, b を t を用いて表せ．

(2) 2 つの放物線 C，C_2 で囲まれた部分の面積 S を t を用いて表せ．

(3) t を動かすとき，S の最小値を求めよ．

【テーマ】：3 次関数のグラフで囲まれた面積の最小値

方針

(1) は共通接線の問題です．(2) は面積を求める問題ですが，交点の x 座標がきれいな値にならないので，文字で代用しましょう．

♣ ♠

解答

(1) $f(x) = -x(x-1)$，$g(x) = x(x-1)$，$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax + b$ とおくと，題意より，

$$\begin{cases} f(t) = h(t) & \cdots\cdots ① \\ f'(t) = h'(t) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ．① より，

$$-t(t-1) = \frac{1}{2}t^2 + at + b \iff \frac{3}{2}t^2 + (a-1)t + b = 0 \cdots\cdots ①'$$

また，$f'(x) = -2x+1$，$h'(x) = x + a$ であるから，② より，

$$-2t + 1 = t + a \qquad \therefore\ \boldsymbol{a = -3t+1}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

①′ より，

$$\frac{3}{2}t^2 - 3t^2 + b = 0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{b = \frac{3}{2}t^2}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(2) (1) より，$h(x) = \frac{1}{2}x^2 - (3t-1)x + \frac{3}{2}t^2$

$y = g(x)$ と $y = h(x)$ のグラフの交点の x 座標は，

$$x^2 - x = \frac{1}{2}x^2 - (3t-1)x + \frac{3}{2}t^2 \iff x^2 + 2(3t-2)x - 3t^2 = 0$$

この方程式の判別式を D とすると，

$$D = (3t-2)^2 + 3t^2 > 0$$

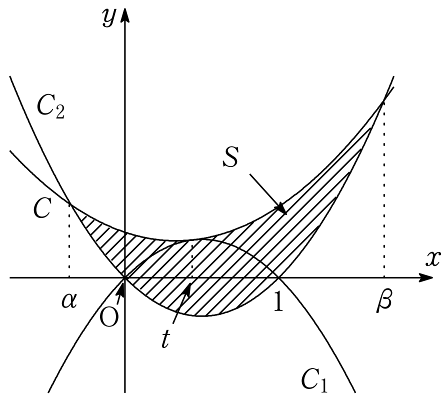
となるので，必ず異なる 2 つの実数解をもつ．その実数解を $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ とすると，解と係数の関係より，

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2(3t-2) \\ \alpha\beta = -3t^2 \end{cases} \cdots\cdots ③$$

であり，面積 S は，

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{h(x)-g(x)\}\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$$



ここで，③ より，

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=4(3t-2)^2+12t^2$$
$$=16(3t^2-3t+1)$$

$\beta-\alpha>0$ より，$\beta-\alpha=4(3t^2-3t+1)^{\frac{1}{2}}$ であるから，

$$S=\frac{1}{12}\cdot 64(3t^2-3t+1)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{16}{3}(3t^2-3t+1)^{\frac{3}{2}}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　(2) より，

$$S=\frac{16}{3}(3t^2-3t+1)^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{16}{3}\left\{3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

よって，$t=\frac{1}{2}$ のとき，S は最小となり，その最小値は $\frac{16}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$……(**答**)

◇　　♡

解説

(1) は，共通接線の問題で $y=f(x)$ と $y=h(x)$ が $x=t$ において共通な接線を持つための条件は，

$$\begin{cases} f(t)=h(t) & \cdots\cdots\ ① \\ f'(t)=h'(t) & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

です．① は通る点が同じである条件で，② は接線の傾きが同じである条件です．直線の方程式は，傾きと通る点で決まるので，この 2 条件があれば十分です．

(2) は，面積を求める問題ですが，2 曲線の交点がきれいな形で求められません．このような場合は，一般に文字で代用するという手段を取ります．放物線と放物線で囲まれる部分の面積は公式で求められるので，文字で代用することで計算の方針が見やすくなるはずです．

(3) は，おまけのような問題で，(2) で求めた S の最小値は，2 次式部分の最小値を求めればよいので，平方完成するだけです．

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto