20 （'92　東京大） 【難易度】 … 標準

定数 a に対して，曲線 $y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{a}{x}$ の $x \geqq 1$ の部分を $C(a)$ とおく．

(1) $C(a)$ が直線 $y=x$ の下部 $y<x$ に含まれるような実数 a の最大値 a_0 を求めよ．

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$C(a_0)$ と 3 直線 $y=x$, $x=1$, $x=\dfrac{1}{\cos\theta}$ によって囲まれる図形を x 軸のまわりに回転させてできる立体 V の体積 $V(\theta)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} V(\theta)$ を求めよ．

【テーマ】：微積分の融合

方針

(1) は，定数分離をして関数 $f(x)$ のとり得る値を求めるという問題に帰着することができます．(2) は，置換積分をうまく利用しましょう．

♣ ♠

解答

(1) $\sqrt{x^2-1}+\dfrac{a}{x}<x \iff a<x^2-x\sqrt{x^2-1}$ であるから，

$f(x)=x^2-x\sqrt{x^2-1}$ とおくとき，$f(x)$ のとり得る値の範囲を求める．$x>1$ において，

$$\begin{aligned}
f'(x)&=2x-\sqrt{x^2-1}-x\cdot\frac{2x}{2x\sqrt{x^2-1}}\\
&=\frac{2x\sqrt{x^2-1}-(2x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}\\
&=\frac{\sqrt{4x^4-4x^2}-\sqrt{4x^4-4x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}}<0
\end{aligned}$$

であるから，$y=f(x)$ のグラフは単調減少である．

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}f(x)&=\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x\sqrt{x^2-1}\right)\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\\
&=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

また，$f(1)=1$ であるから，$\dfrac{1}{2}<f(x)\leqq 1$ となる．ゆえに，実数 a の最大値 a_0 の値は，$\boldsymbol{a_0=\dfrac{1}{2}}$ ……(**答**)

(2) (1) より $1\leqq x\leqq\dfrac{1}{\cos\theta}$ で $C\left(\dfrac{1}{2}\right)$ のグラフは $0<y<x$ にあるので，求める体積は，

$$\begin{aligned}
V(\theta)&=\pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\left\{x^2-\left(\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2x}\right)^2\right\}dx\\
&=\pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\left\{x^2-\left(x^2-1+\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{4x^2}\right)\right\}dx\\
&=\pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\left(1-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{4x^2}\right)dx \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

ここで，

$$\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}\,dx=\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\,dx$$

であるから，$\dfrac{1}{x}=\cos t$ とおくと，$x=\dfrac{1}{\cos t}$ となることから，$dx=\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$ であり，

x	$1 \to \dfrac{1}{\cos\theta}$
t	$0 \to \theta$

であるから，

$$\begin{aligned}\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\,dx &= \int_0^{\theta}\sqrt{1-\cos^2 t}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt\\ &= \int_0^{\theta}\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\,dt\\ &= \int_0^{\theta}\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)dt\\ &= \Big[\tan t - t\Big]_0^{\theta} = \tan\theta-\theta \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

よって，①, ② より

$$\begin{aligned}V(\theta) &= \pi\left[x+\frac{1}{4x}\right]_1^{\frac{1}{\cos\theta}}-\pi(\tan\theta-\theta)\\ &= \pi\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{4}-1-\frac{1}{4}-\tan\theta+\theta\right)\\ &= \boldsymbol{\pi\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{4}-\frac{5}{4}-\tan\theta+\theta\right)}\cdots\cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から，

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}V(\theta) &= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\pi\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{4}-\frac{5}{4}-\tan\theta+\theta\right)\\ &= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\pi\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{4}-\frac{5}{4}+\theta\right)\\ &= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\pi\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{4}-\frac{5}{4}+\theta\right)\\ &= \boldsymbol{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5}{4}\right)\pi}\cdots\cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

まず $y<x$ を満たすという条件から $\sqrt{x^2-1}+\dfrac{a}{x}<x$ を得ますが，このままでは a が式に埋もれているので a の最大値を求めるのは困難です．そこで，a を左辺に残すための式変形を行います．(これが定数分離です) 次に，常に成り立つようにしなければならないので，$f(x)$ の最小値よりも a の値が小さければよいという条件から a の最大値を求めることになります．実際に $f(x)$ の最小値は存在しませんが，$\dfrac{1}{2}<f(x)$ という条件が導かれるので，a が $\dfrac{1}{2}$ 以下であれば必ず不等式が成立することがわかります．(2) では，ちょっとグラフが想像しにくいかもしれませんが，(1) の結果から $1\leqq x\leqq\dfrac{1}{\cos\theta}$ の間で $y<x$ が成り立っていることがわかるので，グラフがかけなくても立式することはできます．参考までに，$y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{2x}$ のグラフをかくと右図のようになります．実際に計算するとわかりますが，$x\to\infty$ のとき，$y=x$ が漸近線になります．