19 ('98　一橋大) 【難易度】… 標準

(1)　$\log_5 3$ は無理数であることを示せ.

(2)　$\log_{10} r$ が有理数となる有理数 r は $r = 10^q$ $(q = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ に限ることを示せ.

(3)　任意の正の整数 n に対して，$\log_{10}(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n)$ は無理数であることを示せ.

【テーマ】：背理法による証明

方針

無理数であることを示す場合は，有理数とおいて矛盾を導きます．有理数とは $\dfrac{n}{m}$ $(m, n$ は互いに素な整数で，$m \neq 0)$ の形に表せる数のことです.

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

$\log_5 3$ が有理数であると仮定すると，

$$\log_5 3 = \frac{n}{m} \quad (m, n \text{ は互いに素な整数で，} m \neq 0)$$

とおくことができる．このとき，$3 = 5^{\frac{n}{m}} \iff 3^m = 5^n$ であるが，右辺は 5 の倍数であるが 3 の倍数にはならないので，矛盾．ゆえに，$\log_5 3$ は無理数であることが示された. **(証明終)**

(2) **【証明】**

真数条件より $r > 0$ であり，$\log_{10} r = \pm\dfrac{n}{m}$ (n は 0 以上の整数で，m を自然数，m, n は互いに素) と表すことができる.

(i)　$\log_{10} r = \dfrac{n}{m}$ のとき，

$$r = 10^{\frac{n}{m}} \iff r^m = 10^n \cdots\cdots ①$$

ここで，r は正の有理数であるから，$r = \dfrac{t}{s}$ …… ② (s, t は互いに素な正の整数で，$t \neq 0$) と表すことができる．よって，

$$\frac{t^m}{s^m} = 10^n \iff t^m = s^m 10^n$$

となるので，s は t^m の正の約数であるが，s, t は互いに素な正の整数であるから $s = 1$ である．よって，

$$t^m = 10^n \iff t^m = 2^n \cdot 5^n$$

と素因数分解することができる．また，この式の両辺の素因数の個数が一致するためには，t が含んでいる素因数 2 と 5 の個数も等しくその個数を q とおくと，

$$t = 2^q \cdot 5^q = 10^q$$

であるから，$s = 1$ であることと ② より，$r = 10^q$ となる.

(ii)　$\log_{10} r = -\dfrac{n}{m}$ のとき，

$$\frac{1}{r} = 10^{\frac{n}{m}}$$

となるが，r が有理数であることから $\dfrac{1}{r}$ も有理数となるので，① と同じである．よって，(ｉ) と同様の議論で $r=10^{-q}$ と表される．以上より，題意は示された．　**(証明終)**

(3) **【証明】**

$1+3+3^2+\cdots+3^n=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$ である．ここで，与えられた数が有理数であると仮定すると，(2) より

$$\frac{3^{n+1}-1}{2}=10^q \quad (q>0)$$

と表すことができる．この式を変形すると，

$$3^{n+1}-1=2\cdot 10^q \iff 3^{n+1}+(10^q-1)=3\cdot 10^q$$

となる．$n\geqq 1$ であり，$q>0$ であることから 3^{n+1}, 10^q-1 はともに 9 の倍数となるので，左辺は 9 の倍数である．ところが右辺は 9 の倍数ではないので矛盾．ゆえに，与えられた数は無理数であることが示された．

(証明終)

◇ ──── ♡

解説

無理数の証明に背理法を使うのは，常套手段といってもよいでしょう．(1) はできるようになっておかなければいけない基本問題です．(2) に関しては，$\log_{10} r$ が有理数となることを前提に使ってよいのですからこれを分数で表すことから始めます．注意したいのは，負の数を忘れないようにすることです．議論としては，正の場合と負の場合に分けて，正の場合を先に示しておけば符号が違うだけなので，負の場合は同様の議論で示すことができます．(3) は (2) の結果を使って無理数であることを示すので，再び背理法を用います．