18 ('83 一橋大) 【難易度】… 標準

点 (x, y) が円周 $x^2+y^2=1$ の上を動くとき，次の式の値の範囲を求めよ．

(1) $x+y$

(2) x^4+y^4

(3) x^3+y^3

【テーマ】：三角関数の最大値・最小値

方針

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の任意の点は $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と表すことができるので，与えられた式を θ に関する関数にしてとり得る値を求めます．

♣ ♠

解答

(1) $x^2+y^2=1$ 上の任意の点は $(\cos\theta, \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と表すことができるので，$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ とおくと，

$$x+y=\cos\theta+\sin\theta$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

であり，$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9\pi}{4}$ より，

$$-1 \leqq \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$$ ゆえに，$\boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq x+y \leqq \sqrt{2}}$……(**答**)

(2) (1) と同様に x, y を定めると，

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$$
$$=1-2\cos^2\theta\sin^2\theta$$
$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta$$

$0 \leqq \sin^2 2\theta \leqq 1$ であるから，

$$-\frac{1}{2} \leqq -\frac{1}{2}\sin^2 2\theta \leqq 0 \iff \frac{1}{2} \leqq 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta \leqq 1$$

ゆえに，$\boldsymbol{\dfrac{1}{2} \leqq x^4+y^4 \leqq 1}$……(**答**)

(3) (1) と同様に x, y を定めると，

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$=(\cos\theta+\sin\theta)(1-\cos\theta\sin\theta)$$

ここで，$\cos\theta+\sin\theta=t$ とおくと，(1) より，$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ であり，

$$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta \iff \sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

であるから，

$$x^3+y^3=t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$$

よって，$f(t)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$ とおくと，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における $f(t)$ のとり得る値の範囲を求めればよい．
$f'(t)=-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}(t^2-1)$ であるから，$f'(t)=0$ のとき，$t=\pm1$ である．よって，増減表は次のようになる．

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(-\sqrt{2})=-\frac{1}{2}(-2\sqrt{2})+\frac{3}{2}(-\sqrt{2})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f(-1)=-\frac{1}{2}(-1)+\frac{3}{2}(-1)=-1$
$f(\sqrt{2})=-\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}+\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f(1)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$

よって，$\boldsymbol{-1\leqq x^3+y^3\leqq 1}$**……(答)**

◇ ♡

解説

(1) は，$x+y=k$ とおいて円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=-x+k$ が共有点を持つという条件からも範囲を求めることができます．しかし，(2), (3) においては，このようなやり方では求めることが困難なため，円の媒介変数表示 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ を用いて変数を θ 一つにする必要があります．入試問題には，このように 2 変数を媒介変数や置き換えなどによって 1 変数にしなければ解けないという問題が多いので，この類の問題演習はしっかりと積んでおきましょう．