17 （′07　京都大） 【難易度】 … やや難

A を 2 次の正方行列とする．列ベクトル $\overrightarrow{x_0}$ に対し, 列ベクトル $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$, … を $\overrightarrow{x_{n+1}}=A\overrightarrow{x_n}$，$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ によって定める．ある零ベクトルではない $\overrightarrow{x_0}$ について，3 以上の自然数 m で初めて $\overrightarrow{x_m}$ が $\overrightarrow{x_0}$ と一致するとき，行列 A^m は単位行列であることを示せ．

【テーマ】：１次変換

方針

いろいろな方針があると思いますが，ここではケーリー・ハミルトンの定理を使って解いていきます．

♣　♠

解答

【証明】

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とし，$a+d=s,\ ad-bc=t$ とおくと，ケーリー・ハミルトンの定理より，

$$A^2-sA+tE=O \iff A^2=sA-tE$$

が成り立つ．よって，

$$A^3=sA^2-tA=s(sA-tE)-tA=(s^2-t)A-stE$$

となるので，以後帰納的に $m \geqq 3$ のとき，$A^m=pA-qE \cdots$ ① と表すことができる．ただし，$p,\ q$ は実数．
① より，

$$A^m\overrightarrow{x_0}=pA\overrightarrow{x_0}-qE\overrightarrow{x_0}$$

が成り立ち，$\overrightarrow{x_m}=A\overrightarrow{x_{m-1}}=\cdots=A^m\overrightarrow{x_0}$ より，

$$\overrightarrow{x_m}=pA\overrightarrow{x_0}-qE\overrightarrow{x_0}$$

である．ここで，$\overrightarrow{x_m}=\overrightarrow{x_0}$ より，

$$\overrightarrow{x_0}=pA\overrightarrow{x_0}-qE\overrightarrow{x_0} \iff pA\overrightarrow{x_0}=(1+q)\overrightarrow{x_0} \cdots ②$$

となる．$p \fallingdotseq\!\!\!\!\!/\ 0$ のとき，

$$A\overrightarrow{x_0}=\frac{1+q}{p}\overrightarrow{x_0}$$

となるので，$r=\dfrac{1+q}{p}$ とおくと，

$$A\overrightarrow{x_0}=r\overrightarrow{x_0} \text{ より，} A^2\overrightarrow{x_0}=r^2\overrightarrow{x_0} \cdots ③$$

であり，以後帰納的に変形することで $A^m\overrightarrow{x_0}=r^m\overrightarrow{x_0}$ を得る．したがって，

$$\overrightarrow{x_m}=r^m\overrightarrow{x_0}$$

となり，$\overrightarrow{x_m}=\overrightarrow{x_0}$ より，

$$\overrightarrow{x_0}=r^m\overrightarrow{x_0}$$

である．$\overrightarrow{x_0} \neq \overrightarrow{0}$ であるから，$r^m=1$ でありこのとき，$r=\pm1$ となるので $r^2=1$ である．このとき，③ より，$A^2\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}$ となるので，$m \geqq 3$ で初めて $\overrightarrow{x_m}$ と $\overrightarrow{x_0}$ が一致するという条件に反し不適．よって，$p=0$ となる．
このとき，② より，

$$(q+1)\overrightarrow{x_0}=\vec{0}$$

となり，$\overrightarrow{x_0}\neq\vec{0}$ であることから，$q=-1$ を得る．よって，① より，

$$A^m=E$$

となるので，題意は示された． **（証明終）**

―――――――――――― ♢ ―――――――――――― ♡ ――――――――――――

$\boxed{\text{解説}}$

証明の概要は，一般に A^m が A と E だけで表されることを述べておき，そこから A の係数が 0 になり，E の係数が 1 となることを導くというものです．与えられた条件 $\overrightarrow{x_{n+1}}=A\overrightarrow{x_n}$ と $\overrightarrow{x_m}=\overrightarrow{x_0}$ をどのように使うかがポイントとなります．