16 （'90　東京大） 【難易度】 … 標準

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$，$b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ とするとき，$\lim_{n\to\infty}a_n$，$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよ．

【テーマ】：数列の極限

方針

(1) は，和が具体的に求められないので，不等式を用いて和が求められる式を作り評価します．(2) も同様にしますが，(1) を利用して極限を求めます．

♣ ♠

解答

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\frac{1}{2\sqrt{k}}$$

であるから，$k=1, 2, \cdots, n$ として辺々加えると，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}} \iff \sqrt{n+1}-1<\frac{1}{2}a_n$$

$$\therefore\ a_n>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-1\right)=\infty$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty\cdots\cdots(\textbf{答})$$

次に，

$$\frac{1}{\sqrt{2(k+1)}}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}<\frac{1}{\sqrt{2k}}$$

が成り立つので，$k=1, 2, \cdots, n$ として辺々加えると，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2(k+1)}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}<b_n<\frac{1}{\sqrt{2}}a_n\cdots\cdots Ⓐ$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}a_n-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}<b_n<\frac{1}{\sqrt{2}}a_n$$

$a_n>0$ であるから，各辺を a_n で割って，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}a_n}+\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}a_n}<\frac{b_n}{a_n}<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

♢ ♡

解説

(1) は，はさみうちの原理ではなく，a_n より小さい数列を作ってその数列が発散することを示すことで a_n の極限を求めます．不等式を立式するのが大変かもしれません．和が求められないタイプの問題は不等式を利用して他の形の極限を計算するという方法を取ることが多いので知っておきましょう．(2) は，(1) の結果を使いますが，こちらははさみうちの原理を利用します．k で成り立つ不等式を作って k の値を $k=1, 2, \cdots, n$ と変えて辺々を加えると書いていますが，結果的には，$\sum_{k=1}^{n}$ を付けるだけです．Ⓐ の左辺は，$\sum$ を取り直して $\frac{1}{\sqrt{2}}$ を作っています．そのため余分な項を引いたり，足らない項を足したりする必要が出てきます．