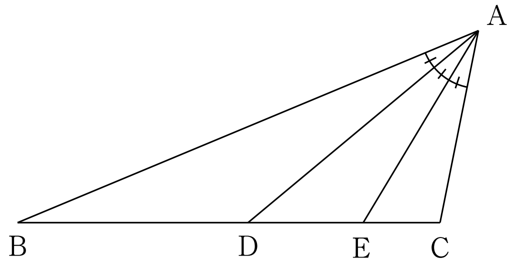
15 （'04　帝京大） **【難易度】 … 標準**

△ABC において，辺 BC 上に点 D, E があり，$AB=7$, $BE=5$, $AE=3$, $\angle BAD=\angle DAE=\angle EAC$ であるとする．

（1） AD，DE の長さを求めよ．

（2） $\angle DAE=\theta$ とおくとき，$\cos\theta$ を求めよ．

（3） EC，CA の長さを求めよ．



【テーマ】：角の二等分線

方針

3 つの角が等しいので，どれか 2 つに着目すると角の二等分線の性質が使えます．辺の長さは余弦定理を多用して計算しましょう．

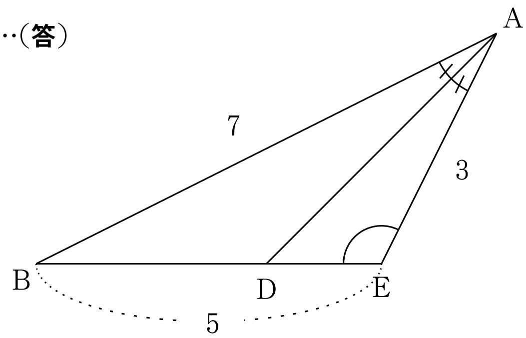
♣ ♠

解答

（1） 角の二等分線の性質より，

$$BD:DE=7:3 \qquad \therefore\ DE=5\times\frac{3}{10}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

また，△ABE で余弦定理より，



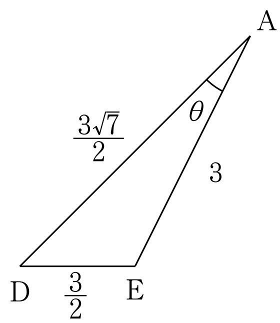
$$\begin{aligned}\cos\angle AEB &= \frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}\\ &= \frac{9+25-49}{2\cdot3\cdot5}\\ &= \frac{-15}{2\cdot3\cdot5}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

したがって，$\angle AEB=120^\circ$ である．よって，△ADE で余弦定理より，

$$\begin{aligned}AD^2 &= 9+\frac{9}{4}-2\cdot\frac{3}{2}\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{45}{4}+\frac{9}{2}\\ &= \frac{63}{4}\end{aligned}$$

$AD>0$ より，$AD=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{7}}{2}}\cdots\cdots$(**答**)

（2） △ADE で余弦定理より，



$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{9+\frac{63}{4}-\frac{9}{4}}{2\cdot3\cdot\frac{3\sqrt{7}}{2}}\\ &= \frac{9+\frac{54}{4}}{9\sqrt{7}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{90}{36\sqrt{7}}\\
&= \frac{5}{2\sqrt{7}}\\
&= \boldsymbol{\frac{5\sqrt{7}}{14}}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}
$$

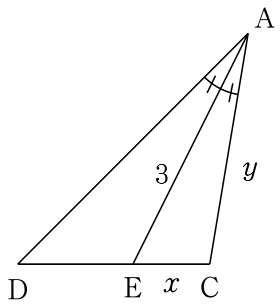
(3) $\mathrm{EC}=x,\ \mathrm{CA}=y$ とおくと，

$$\mathrm{AD}:\mathrm{AC}=\mathrm{DE}:x \iff \frac{3\sqrt{7}}{2}:y=\frac{3}{2}:x$$

よって，$\dfrac{3}{2}y=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}x$ であるから，$y=\sqrt{7}x$……①

△AEC で余弦定理より，

$$
\begin{aligned}
y^2 &= 9+x^2-2\cdot 3\cdot x\cdot \frac{1}{2}\\
7x^2 &= 9+x^2-3x\\
6x^2+3x-9=0 &\iff 2x^2+x-3=0\\
&\iff (2x+3)(x-1)=0
\end{aligned}
$$



$x>0$ より，$x=1$ である．① より $y=\sqrt{7}$ となるので，

$$\mathrm{EC}=\mathbf{1},\ \mathrm{CA}=\boldsymbol{\sqrt{7}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

全体を見る力と部分的な三角形を見る力が必要になります．求めたいものを求めるためには，何がわかればよいかを見抜く力を養っておきましょう．わかっている角や辺を図に記入していき，必要な角や辺を求めるためにはどのようにすればよいかを考えましょう．