14 （'09　岩手大） 【難易度】 … 標準

数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_k, \cdots$ を次のように，第 n 群が 2^{n-1} 個の項を含むように分ける．

$$\{a_1\},\ \{a_2,\ a_3\},\ \{a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7\},\ \{a_8,\ a_9,\ \cdots,\ a_{15}\},\ \{\cdots\},\ \cdots$$

（1）　第 n 群の初項と末項を求めよ．

（2）　$a_k = \dfrac{1}{k}$ のとき，第 n 群に含まれる項の和は $\dfrac{1}{2}$ より大きいことを示せ．

（3）　$a_k = \dfrac{1}{k^2}$ のとき，第 1 群から第 n 群までのすべての項の和は 2 を超えないことを示せ．

【テーマ】：群数列と和の評価

方針

（1）は添え字に着目して考えます．（2），（3）はそのままでは和が計算できないので，不等式を用いて分母を統一し，和を計算しましょう．

♣ ♠

解答

（1）　第 $n-1$ 群の末項までの項数は，

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-2} = \frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 2^{n-1}-1 \cdots\cdots ①$$

であるから，第 n 群の初項は，$\boldsymbol{a_{2^{n-1}}}$……**（答）**

さらに，第 n 群の末項までの項数は ① より，2^n-1 であるから，第 n 群の末項は，$\boldsymbol{a_{2^n-1}}$……**（答）**

（2）　**【証明】**

第 n 群の和を S_n とすると，

$$S_n = a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \cdots\cdots + a_{2^n-1}$$

よって，$a_k = \dfrac{1}{k}$ のとき，

$$\begin{aligned} S_n &= a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \cdots\cdots + a_{2^n-1} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n-1} \\ &> \underbrace{\frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^n-1} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n-1}}_{2^{n-1}\text{ 個の項がある}} \\ &= \frac{2^{n-1}}{2^n-1} > \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ゆえに，示された． **（証明終）**

（3）　**【証明】**

（2）と同様に考えると，$a_k = \dfrac{1}{k^2}$ のとき，第 n 群の和 S_n は，

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}+2}\right)^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{2^n-1}\right)^2 \\ &< \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2}_{2^{n-1}\text{ 個の項がある}} = 2^{n-1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

よって，$S_n < \frac{1}{2^{n-1}}$ が成り立つので，第 1 群から第 n 群までの和を T_n とすると，

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} S_k < \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} < 2$$

ゆえに，示された． **（証明終）**

―――――― ♢ ―――――― ♡ ――――――

解説

不等式を用いて群数列の和を評価する問題です．基本的に (2), (3) で出てくるような和は計算できません．そこで，分母を統一することを考えます．次の式を見てください．

（ｉ） $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} > \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ ☜ 分母が一番大きい数に統一すると値は小さくなる．

（ii） $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} < \frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}$ ☜ 分母が一番小さい数に統一すると値は大きくなる．

本問では，この事実を用いて式変形を行っています．(2) では結論から $\frac{1}{2}$ より大きいことを示したいので，結果的に $S_n > \frac{1}{2}$ を示す必要があります．そのため，不等式をより小さい値で評価する必要があるのです．したがって，（ｉ）のように式変形する必要があるので，分母を 2^n-1 に統一しました．(3) は逆に 2 を超えないことを示すので，$T_n < 2$ を導く必要があります．そのため（ii）のように式変形するため分母を 2^{n-1} に統一しました．非常によくある式変形なので，確実にマスターしておきましょう．