11 （'08　東海大・改）　**【難易度】** … 標準

4 次方程式

$$x^4 - 2x^3 + bx^2 - 2x + 1 = 0 \cdots\cdots ①$$

がある．次の問いに答えよ．

（1）① が実数解をもつような b の値の範囲を求めよ．

（2）① がちょうど 3 個の実数解をもつときの b の値とそのときの実数解を求めよ．

【テーマ】：相反方程式

方針

両辺を x^2 で割り，$x + \dfrac{1}{x} = t$ と置き換えて t の 2 次方程式へ変換します．実数条件を忘れないようにしましょう．

♣ ♠

解答

（1）$x = 0$ は与えられた方程式の解ではないので，両辺を $x^2 \neq 0$ で割ると，

$$x^2 - 2x + b - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \iff x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0$$

を得る．ここで，$x + \dfrac{1}{x} = t$ とおくと，

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$$

であることから，

$$t^2 - 2 - 2t + b = 0 \iff t^2 - 2t - 2 + b = 0 \iff -t^2 + 2t + 2 = b$$

を得る．一方

$$x + \frac{1}{x} = t \iff x^2 - tx + 1 = 0 \cdots\cdots ①$$

であり，この方程式の判別式を D とすると，x は実数であるから，$D \geqq 0$ である．したがって，

$$D = t^2 - 4 \geqq 0 \qquad \therefore\ t \leqq -2,\ 2 \leqq t \cdots\cdots ②$$

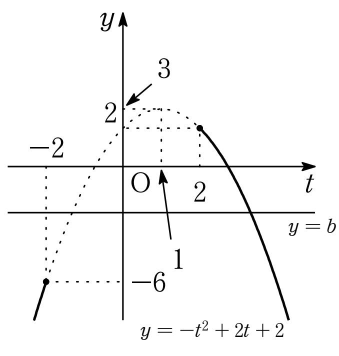
となる．よって，$f(t) = -t^2 + 2t + 2$ とおくと，$y = f(t)$ と $y = b$ のグラフが ② の範囲で共有点をもてばよいので，

$$f(t) = -(t-1)^2 + 3$$

より，右図から求める b の値の範囲は，

$$\boldsymbol{b \leqq 2} \cdots\cdots \text{（答）}$$

となる．



（2）t の値が 1 つ決まるとき，① より t と x の実数解の個数は次のように対応する．

$D > 0$ のとき，　x は 2 個

$D = 0$ のとき，　x は 1 個

$D < 0$ のとき，　x は 0 個

よって，(1) のグラフから $b=-6$ のとき x の値は 3 個存在することがわかる．このとき，$t=-2, 4$ であるから，

$t=-2$ のとき，① より，

$$x^2+2x+1=0 \iff (x+1)^2=0 \qquad \therefore\ x=-1$$

$t=4$ のとき，① より，

$$x^2-4x+1=0 \qquad \therefore\ x=2\pm\sqrt{3}$$

以上より，b の値とそのときの解は，$\boldsymbol{b=-6,\ x=-1,\ 2\pm\sqrt{3}}$……**(答)**

◇ ♡

解説

相反方程式の解法をまとめておきましょう．

【相反方程式】

x の方程式 $P(x)=0$ において，その係数が左右対称になっている方程式を**相反方程式**という．

例：
- (ｉ) 偶数次の相反方程式　$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$
- (ii) 奇数次の相反方程式　$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$

$P(x)=0$ が n 次の相反方程式であるとする．

① n が偶数のとき，　$x=0$ は解とならないので，両辺を $x^{\frac{n}{2}} \neq 0$ で割ります．

② n が奇数のとき，　$x=-1$ が解となるので，$(x+1)$ で因数分解をします．
そうすると，偶数次の相反方程式が出てきます．

いずれにしても 両辺を $x^{\frac{n}{2}}$ で割った後は，$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおいて，t に関する方程式を解き，その後 x の値を求めます．

本問は，偶数次の相反方程式です．単に方程式を解くだけでなく実数解の個数の問題となっているので，実数条件から t のとり得る値を求めるのを忘れないようにしましょう．また，t の個数と x の個数の関係を調べることにも慣れておく必要があります．このような個数を求める問題は様々なところで見かけるので確実にマスターして受験に臨んでください．