10 （'58　大阪大） **【難易度】** … 標準

放物線 $y = x^2 - 4$ を平行移動して，x 軸上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\,0)$, $\mathrm{B}(b,\,0)$ を通る放物線にするには，どう移動すればよいか．またこのようにして得られた放物線において a, b が条件 $ab = 4$ を満たしながら変わるとき，その頂点がえがく図形を求めよ．

【テーマ】：軌跡

方針

移動後の放物線の方程式を求めて，頂点の移動を調べます．後半は，軌跡の問題なので，頂点の座標を（X, Y）として，X, Y の関係式を導きましょう．

♣ ♠

解答

点 A, B を通る放物線の方程式は，

$$\begin{aligned} y &= (x-a)(x-b) \\ &= x^2 - (a+b)x + ab \\ &= \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(a+b)^2}{4} + ab \\ &= \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(a-b)^2}{4} \end{aligned}$$

よって，頂点の移動を調べると，点 $(0,\,-4)$ が 点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\,-\dfrac{(a-b)^2}{4}\right)$ … ① に移るので，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}\ \textbf{軸方向へ}\ \boldsymbol{\dfrac{a+b}{2}} \\ \boldsymbol{y}\ \textbf{軸方向へ}\ \boldsymbol{4 - \dfrac{(a-b)^2}{4}} \end{cases} \cdots\cdots(\text{答})$$

平行移動すればよい．このとき，頂点は

$$\left(\frac{a+b}{2},\,-\frac{(a+b)^2}{4} + ab\right)$$

であり，$ab = 4$ であるから，$\left(\dfrac{a+b}{2},\,-\dfrac{(a+b)^2}{4} + 4\right)$ となるので，頂点の座標を（X, Y）とすると，

$$X = \frac{a+b}{2},\quad Y = -\frac{(a+b)^2}{4} + 4$$

より，$Y = -X^2 + 4$ を得る．ここで，① より，頂点の y 座標に着目すると，

$$-\frac{(a-b)^2}{4} < 0 \text{ であるから } Y < 0$$

ゆえに，頂点の描く図形は，

放物線 ： $\boldsymbol{y = -x^2 + 4\ (y < 0)}$……（答）

◇ ♡

解説

標準的な軌跡の問題ですが，最後のところで頂点の y 座標のとり得る値を求めるのを忘れやすいので注意しましょう．