9 （'88　東京工業大） 【難易度】 … やや難

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ．

【テーマ】：区分求積法

方針

経験がないと難しい問題ですが，まず極限を無視して a_n とおいて自然対数を考えましょう．その後，組合せの計算をすれば区分求積法に持っていけることがわかります．

♣ ♠

解答

$a_n=\left(\dfrac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ とおく．a_n は正数であるから，両辺自然対数をとると，

$$\begin{aligned}
\log a_n &= \frac{1}{n}\log\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\log\left(\frac{(3n)!}{(2n)!\cdot n!}\cdot\frac{n!\cdot n!}{(2n)!}\right)\\
&= \frac{1}{n}\log\frac{3n(3n-1)(3n-2)\cdots(2n+1)}{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)}\\
&= \frac{1}{n}\log\frac{3\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(3-\frac{n-1}{n}\right)}{2\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(2-\frac{n-1}{n}\right)}\\
&= \frac{1}{n}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(3-\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(2-\frac{k}{n}\right)\right\}
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\log a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(3-\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(2-\frac{k}{n}\right)\right\}\\
&= \int_0^1\log(3-x)\,dx-\int_0^1\log(2-x)\,dx\\
&= \Big[-(3-x)\log(3-x)\Big]_0^1-\int_0^1(3-x)\cdot\frac{-1}{3-x}\,dx\\
&\qquad -\Big[-(2-x)\log(2-x)\Big]_0^1+\int_0^1(2-x)\cdot\frac{-1}{2-x}\,dx\\
&= -2\log 2+3\log 3+1-2\log 2-1\\
&= 3\log 3-4\log 2=\log\frac{27}{16}
\end{aligned}$$

を得るので，求める極限値は，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\boldsymbol{\frac{27}{16}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

♢ ♡

積の形で出てきた場合は，対数を利用することで和の形に変形することができます．これを利用するため，まず極限を無視して a_n とおき自然対数をとりました．組合せの計算（階乗計算）をうまくしないと区分求積法に持っていけなくなります．