8 （'90　北海道大） 【難易度】… 標準

数列 $\{a_n\}$ は，$0 < a_1 < 1$,

$$a_{n+1} = \frac{n{a_n}^2 + 2n + 1}{a_n + 3n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たしているとする．

(1) $0 < a_n < 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ であることを示せ．

(2) $1 - a_{n+1} < \dfrac{2}{3}(1 - a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n}$ を求めよ．

【テーマ】：数列の極限

方針

(1) は数学的帰納法で証明します．(2) は (1) の証明途中で現れた式を利用して示していきます．(3) は，不定形の極限処理がポイントです．ここでも (1) の証明途中で現れた式を利用すると楽に計算できるでしょう．

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

（ｉ） $n = 1$ のとき，与えられた条件より成り立つことは明らかである．

（ii） $n = k\ (k \geqq 1)$ のとき，

$$0 < a_k < 1 \cdots\cdots ①$$

が成り立つと仮定する．このとき，与えられた漸化式に $n = k$ を代入すれば，① と $k \geqq 1$ より，

$$a_{k+1} = \frac{k{a_k}^2 + 2k + 1}{a_k + 3k} > 0$$

が成り立つ．次に，

$$\begin{aligned} 1 - a_{k+1} &= 1 - \frac{k{a_k}^2 + 2k + 1}{a_k + 3k} \\ &= \frac{a_k + 3k - k{a_k}^2 - 2k - 1}{a_k + 3k} \\ &= \frac{-k{a_k}^2 + a_k + k - 1}{a_k + 3k} \\ &= \frac{(ka_k + k - 1)(1 - a_k)}{a_k + 3k} \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

であり，① より $1 - a_k > 0$, $a_k + 3k > 0$ である．また，① より，

$$0 < ka_k < k \quad \Longleftrightarrow \quad k - 1 < ka_k + k - 1 < 2k - 1$$

が得られ，$k - 1 \geqq 0$ であることから，$ka_k + k - 1 > 0$ が示される．よって，$1 - a_{k+1} > 0$ が示されるので，$0 < a_{k+1} < 1$ が示された．すなわち，$n = k + 1$ のときも成り立つ．

ゆえに，数学的帰納法によって $0 < a_n < 1$ であることが示された． **（証明終）**

(2) **【証明】**

(1) の ② より，$1 - a_{n+1} = \dfrac{(na_n + n - 1)(1 - a_n)}{a_n + 3n} = \dfrac{na_n + n - 1}{a_n + 3n}(1 - a_n)$

ここで，(1) より，$na_n+n-1<n+n=2n$,　$a_n+3n>3n$ であるから，$\dfrac{na_n+n-1}{a_n+3n}<\dfrac{2}{3}$ である．したがって，

$$1-a_{n+1}=\frac{na_n+n-1}{a_n+3n}(1-a_n)<\frac{2}{3}(1-a_n)$$

が成り立つことが示された． **(証明終)**

さらに，このとき，

$$\begin{aligned}0<1-a_n &< \frac{2}{3}(1-a_{n-1})\\ &<\left(\frac{2}{3}\right)^2(1-a_{n-2})\\ &<\cdots\cdots\\ &<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(1-a_1)\end{aligned}$$

$1-a_1>0$ であり，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\to 0\ (n\to\infty)$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=0 \qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\mathbf{1}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　与えられた漸化式と ② 式を用いて式変形を行うと，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{na_n{}^2+2n+1}{a_n+3n}}{1-a_n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3n-na_n{}^2-2n-1}{(1-a_n)(a_n+3n)}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{(na_n+n-1)(1-a_n)}{(1-a_n)(a_n+3n)}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+n-1}{a_n+3n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{a_n}{n}+3}\end{aligned}$$

$0<a_n<1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$ である．さらに，(2) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ であるから，求める極限値は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

解けない漸化式においては，本問のように極限を求める問題が主流です．非常に多くの類題があり，数列の極限では頻出問題なので必ずマスターしておく必要があります．

なお，(2) においては，収束することがわかっている場合，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$ (有限確定値) として，与えられた漸化式に代入することで，極限値を予想することもできます．本問の場合は，

$$a_{n+1}=\frac{a_n{}^2+2+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{a_n}{n}+3}$$

として，$n\to\infty$ とします．$0<a_n<1$ は示しているので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$ となることがわかります．あとは，a_n の極限値を α として考えればよいので，

$$\alpha=\frac{\alpha^2+2}{3} \iff (\alpha-1)(\alpha-2)=0$$

より，$\alpha=1,2$ を得ますが，$0<a_n<1$ なので，$\alpha=1$ ではないかな？と予想できます．ただし，この方法はあくまで極限値を予想するために行うもので，解答で使うには論理が十分ではないので気を付けましょう．