7 （'94　北海道大） 【難易度】 … 標準

$0 < a < 2$ とし，2 つの 3 次曲線

$$y = ax^3 - (2a+1)x^2 + ax + 1,$$

$$y = (a-2)x^3 + 3x^2 - 3ax + 1$$

で囲まれる面積を S とする．

（1） S を求めよ．

（2） S が最小となる a の値を求めよ．

【テーマ】：3 次関数のグラフで囲まれた面積の和

方針

3 次関数のグラフ 2 つで囲まれた部分の面積の和を求める問題で，交点の x 座標を求めて積分するだけです．

♣ ♠

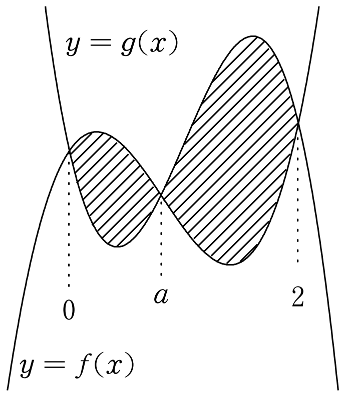
解答

(1) $f(x) = ax^3 - (2a+1)x^2 + ax + 1$，$g(x) = (a-2)x^3 + 3x^2 - 3ax + 1$ とおくと，
$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの交点の x 座標は，

$$ax^3 - (2a+1)x^2 + ax + 1 = (a-2)x^3 + 3x^2 - 3ax + 1$$
$$2x^3 - (2a+4)x^2 + 4ax = 0$$
$$2x(x-a)(x-2) = 0$$

$0 < a < 2$ より，$x = 0, a, 2$ である．

よって，右図斜線部分の面積が S であるから，



$$\begin{aligned}
S &= \int_0^a \{f(x) - g(x)\}\,dx + \int_a^2 \{g(x) - f(x)\}\,dx \\
&= \int_0^a \{f(x) - g(x)\}\,dx + \int_2^a \{f(x) - g(x)\}\,dx \\
&= 2\int_0^a \{x^3 - (a+2)x^2 + 2ax\}\,dx + 2\int_2^a \{x^3 - (a+2)x^2 + 2ax\}\,dx \\
&= 2\Big[\ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+2)x^3 + ax^2\ \Big]_0^a + 2\Big[\ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+2)x^3 + ax^2\ \Big]_2^a \\
&= 2\left(\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}(a+2)a^3 + a^3\right) \times 2 - 2\left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3}(a+2) + 4a\right) \\
&= a^4 - \frac{4}{3}(a+2)a^3 + 4a^3 - 8 + \frac{16}{3}(a+2) - 8a \\
&= \boldsymbol{-\frac{1}{3}a^4 + \frac{4}{3}a^3 - \frac{8}{3}a + \frac{8}{3}} \cdots\cdots (\textbf{答})
\end{aligned}$$

(2) (1) より，

$$\begin{aligned}
S' &= -\frac{1}{3}(4a^3 - 12a^2 + 8) \\
&= -\frac{4}{3}(a^3 - 3a^2 + 2) \\
&= -\frac{4}{3}(a-1)(a^2 - 2a - 2)
\end{aligned}$$

よって，$S' = 0$ のとき，$a = 1, 1 \pm \sqrt{3}$ であり，$0 < a < 2$ より $a = 1$ である．よって，増減表は次のようになる．

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	1	↗	

よって，S が最小となる a の値は $\boldsymbol{a=1}$……(**答**)

◇ ♡

解説

3 次関数のグラフで囲まれる面積を求める場合は，どちらの関数が上にくるかをきちんと吟味しておく必要があります．本問では $y=f(x)$ の 3 次の係数が正で，$y=g(x)$ の 3 次の係数が負であることと，交点の x 座標の値から上下関係が判断できます．文字が入っているため正確なグラフをかくことができないので，解答にあるように位置関係をつかむグラフがかけていれば十分でしょう．

【3 次の積分公式】

α,β,γ を実数とするとき，次式が成り立つ．

$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx=-\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3(\alpha+\beta-2\gamma)$$

特に，$\gamma=\alpha$，$\gamma=\beta$ のとき，それぞれ有名公式

（ｉ） $\displaystyle\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=-\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4$

（ii） $\displaystyle\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4$

が成り立つ．

（ｉ），（ii）は，3 次関数のグラフとその接線で囲まれる部分の面積を求める際に重宝する．

本問では，上記公式を使っても面積 S を求めることができる．

$$\begin{aligned}S&=\int_0^a\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_a^2\{g(x)-f(x)\}\,dx\\&=\int_0^a\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_2^a\{f(x)-g(x)\}\,dx\\&=2\int_0^a x(x-a)(x-2)\,dx+2\int_2^a x(x-a)(x-2)\,dx\\&=-\frac{2}{12}a^3(a-4)-\frac{2}{12}(a-2)^3(a+2)\\&=\boldsymbol{-\frac{1}{3}a^4+\frac{4}{3}a^3-\frac{8}{3}a+\frac{8}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$