6 ('94 岡山大) 【難易度】 … 標準

xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対して，さいころを投げて目 k $(1 \leqq k \leqq 6)$ が出たとき，k が奇数であれば P を $\left(x+\dfrac{k-3}{2},\ y\right)$ に移し，k が偶数であれば $\left(x,\ y+\dfrac{k-4}{2}\right)$ に移す．最初 P が原点にあるものとし，n 回さいころを投げた後の P の座標を (x_n, y_n) とする．このとき，次の問に答えよ．ただし，さいころのそれぞれの目の出る確率は $\dfrac{1}{6}$ であるとする．

(1) $(x_6, y_6)=(3, 3)$ である確率を求めよ．

(2) $(x_5, y_5)=(-1, 2)$ である確率を求めよ．

(3) (x_n, y_n) が $|x_n|+|y_n| \leqq n-1$ を満たす確率を求めよ．

【テーマ】：移動の確率

方針

問題文の条件から，上下左右に動く確率は $\dfrac{1}{6}$，動かない確率は $\dfrac{1}{3}$ であることがわかるので，(1), (2) はどのように移動するかをすべて考えれば解答できます．(3) は，余事象の確率を利用しましょう．

♣ ♠

解答

(1) 題意より，右へ 1，左へ 1，上へ 1，下へ 1 移動する確率はすべて $\dfrac{1}{6}$ であり，その場にとどまる確率は $\dfrac{1}{3}$ である．6 回さいころを投げて (3, 3) に移動するためには，右へ 3 上へ 3 移動すればよいので，求める確率は，

$$ {}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{6^6}=\boldsymbol{\frac{5}{11664}}\cdots\cdots(\textbf{答}) $$

(2) 5 回さいころを振って $(-1, 2)$ に移動するのは，

(i) 右へ 1，左へ 2，上へ 2

(ii) 左へ 1，上へ 3，下へ 1

(iii) 左へ 1，上へ 2，残り 2 回は動かず

の 3 通りしかない．

(i) のとき，その確率は，

$$ \frac{5!}{2!2!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot6^5}=\frac{5}{6^4} $$

である．

(ii) のとき，その確率は，

$$ \frac{5!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot6^5}=\frac{10}{3\cdot6^4} $$

である．

(iii) のとき，その確率は，

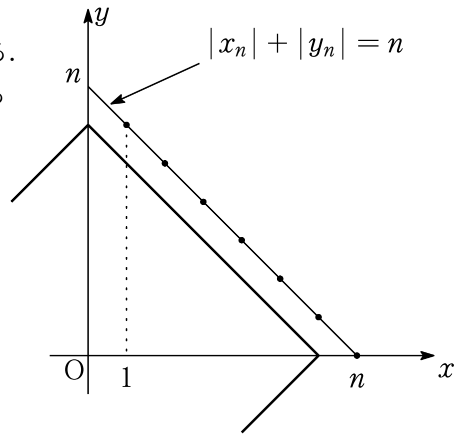
$$ \frac{5!}{2!2!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot6^3\cdot3^2}=\frac{60}{3\cdot6^4} $$

である．

ゆえに求める確率は,

$$\frac{5}{6^4}+\frac{10}{3\cdot 6^4}+\frac{60}{3\cdot 6^4}=\frac{15+10+60}{3\cdot 6^4}=\mathbf{\frac{85}{3888}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(3) n 回サイコロを投げたとき，点 P は $|x_n|+|y_n|\leqq n$ で表される領域内に必ずあるので，余事象である $|x_n|+|y_n|=n$ 上に点 P がくる確率を求めればよい.



ここで，$x_n\geqq 1,\ y_n\geqq 0,\ x_n+y_n=n$ 上に点 P がくる確率を考える.

このときの，確率を p とすると，上に k 回，右に $n-k$ 回移動すると考えて,

$$\begin{aligned}p&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k}\\&=\left(\frac{1}{6}\right)^n\sum_{k=0}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_k\\&=\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k-{}_n\mathrm{C}_n\right)\end{aligned}$$

ここで，二項定理より

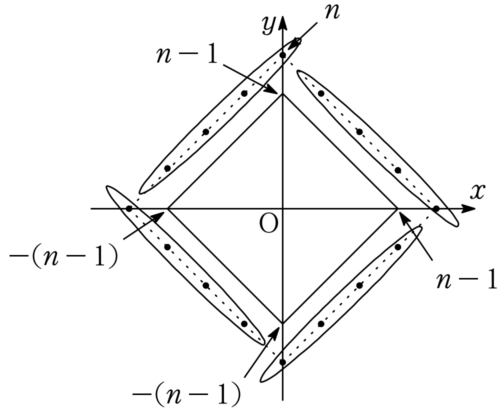
$$(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_kx^k$$

が成り立つので，この式において $x=1$ とすると,

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k$$

となる．ゆえに,

$$\begin{aligned}p&=\left(\frac{1}{6}\right)^n(2^n-1)\\&=\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\end{aligned}$$



である．右図のように対称性から他の部分でも同様の確率になるので，求める確率は,

$$1-4p=\mathbf{1-\frac{4}{3^n}+\frac{4}{6^n}}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

(1) は，基本問題なので完答したい．(2) は結構場合がありそうに感じるが，x 軸方向の移動と y 軸方向の移動を別々で考えるとよい．その際，最低でも左へ 1，上へ 2 移動しなければならないことを考えると場合は限られてくることがわかるので，漏れないように書き出すだけとなる．(3) はまともに考えると難しいので，余事象の確率を利用することを考えよう．それに気付くためには，解答中にも書いたが,

n 回の移動で，点 P は $|x_n|+|y_n|\leqq n$ で表される領域内に必ずある

という事実に気付けるかどうかということと，$|x_n|+|y_n|=n$ 上に点 P がくるためには，必ず毎回移動する（とどまることはない）ということに気付くことがポイントとなる．なお，途中で二項定理を用いて $\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k=2^n$ を証明したが，これは，$\sum$ と C の組合せではよく出てくる式なので，必ず覚えておきたい.