5 （'90　お茶の水女子大） 【難易度】 … 標準

a を整数，n を自然数とし，$f(x)=x^4+3ax^2+2ax-2\cdot 3^n$ とおく．

（1） 有理数 r が $f(x)=0$ の解であれば，r は整数であることを示せ．

（2） a が $f(x)=0$ の解であるとき，a および n の値を求めよ．

【テーマ】：整数問題

方針

(1) は，$r=\dfrac{t}{s}$ (t, s は互いに素な整数，$s \neq 0$) などと置いて，$s=1$ となることを示します．(2) では，素因数分解の形から a がとる値の可能性を絞っていきます．

♣ ♠

解答

（1） s, t を互いに素な整数とし，$s \neq 0$ に対して $r=\dfrac{t}{s}$ とおくと，題意より

$$\left(\frac{t}{s}\right)^4+3a\left(\frac{t}{s}\right)^2+2a\left(\frac{t}{s}\right)-2\cdot 3^n=0 \iff \frac{t^4}{s}=-(3ast^2+2as^2t-2\cdot 3^n s^3)$$

となり，a, s, t, n が整数であることから，右辺は整数となる．左辺が整数となるためには，s, t が互いに素な整数であることから $s=\pm 1$ となるので，$r=\pm t$ となり，r は整数であることが示された． **(証明終)**

（2） a が $f(x)=0$ の解であるとき，

$$a^4+3a^3+2a^2-2\cdot 3^n=0 \iff a^2(a+1)(a+2)=2\cdot 3^n$$

が成り立つ．ここで，a が整数で右辺には素因数 2 が一つしかないので，a は奇数となる．このとき，a^2, $a+2$ は奇数で，$a+1$ は偶数となるので，

$$a+1=\pm 2 \qquad \therefore\ a=-3,\ 1$$

となる．

（ｉ） $a=-3$ のとき，$a^2(a+1)(a+2)=(-3)^2\cdot(-2)\cdot(-1)=2\cdot 3^2$ となるので，$n=2$

（ii） $a=1$ のとき，$a^2(a+1)(a+2)=1^2\cdot 2\cdot 3=2\cdot 3$ となるので，$n=1$

以上より，求める a, n の組は，

$$\boldsymbol{(a,\ n)=(-3,\ 2),\ (1,\ 1)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

♢ ♡

解説

整数問題と論証が混ざった問題です．考え方は頻出で一度は経験しておきたい問題です．(1) では，証明の道筋がきちんと立てられるか，(2) では，素因数分解された形から a の値を絞り込めるかどうかがポイントになります．右辺に 2 が一つしかないことから a は奇数と断定しています．それは，もしも a が偶数であれば a^2 があるので，素因数 2 が必ず 2 つ以上出てくるという理由からです．整数問題は，論証との融合も多く解答の仕方を経験しておかないと難しいので，多くの経験値を積んでおきましょう．