4 ('92 岡山大) 【難易度】… 標準

空間の点 O を中心とする半径 1 の球面を S とし，S 上の相異なる 3 点 A, B, C は点 O を含む 1 つの平面上にあるとする．点 P が S 上を自由に動きまわるとして，次の問いに答えよ．

(1) △ABC が正三角形のとき $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$ は，P の位置によらず一定であることを示せ．

(2) △ABC が $\angle \mathrm{C}=90^\circ$ である直角三角形のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$ の最大値と最小値を求めよ．

【テーマ】：位置ベクトルの応用

方針

点 O を始点とした位置ベクトルを考えます．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$ などと置いて考えるとよいでしょう．

解答

(1) **【証明】**

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}-\vec{p},\ \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}-\vec{p},\ \overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{c}-\vec{p}$$

と表せるので，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2&=|\vec{a}-\vec{p}|^2+|\vec{b}-\vec{p}|^2+|\vec{c}-\vec{p}|^2\\&=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2\\&=6-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}\qquad\left(\because\ |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{p}|=1\right)\end{aligned}$$

である．ここで △ABC が正三角形であることから，点 O は △ABC の外心であり，かつ重心でもあるから，

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\vec{0}\qquad\therefore\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=6$ となるので，点 P の位置によらず一定であることが示された．**(証明終)**

(2) 題意より，辺 AB は球面 S の直径となる．よって，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ であるから，(1) から

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=6-2\vec{c}\cdot\vec{p}$$

を得る．ここで，$\vec{c}$ と $\vec{p}$ のなす角を θ ($0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$) とすると，

$$\vec{c}\cdot\vec{p}=|\vec{c}||\vec{p}|\cos\theta=\cos\theta\qquad\left(\because\ |\vec{c}|=|\vec{p}|=1\right)$$

であり，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であることから，

$$-1\leqq\vec{c}\cdot\vec{p}\leqq1$$

よって，

$$-2\leqq-2\vec{c}\cdot\vec{p}\leqq2\iff 4\leqq6-2\vec{c}\cdot\vec{p}\leqq8$$

$$\therefore\ 4\leqq|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2\leqq8$$

ここで，$\vec{c}=\vec{p}$ のとき $\theta=0^\circ$ であり，$\vec{c}=-\vec{p}$ のとき，$\theta=180^\circ$ である．したがって，等号が成立する θ が存在するので，最大値・最小値は存在する．

ゆえに，求める最大値と最小値は，

$$\begin{cases} \textbf{最大値}\quad 8 \\ \textbf{最小値}\quad 4 \end{cases} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

——— ♢ ——— ♡ ———

解説

(1) は $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ に気付けるかどうかがポイントです．正三角形であることは，重心と外心と内心は一致することを知っておく必要があります．(2) では，AB が球の直径になることに気付いてさらに $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ を利用するという考えが必要です．ちなみに本問の設定は空間ですが，実際は平面の知識があれば十分解答できます．空間を意識しすぎると (2) が難しく感じるかもしれません．また，最後の部分で等号が成立するための θ がきちんと存在するかどうかを吟味することは非常に大切なので，忘れないようにしましょう．