37 ('99　鹿児島大) **【難易度】** … 標準

負でない整数 k に対して $a_k = \int_0^1 e^{-x}x^k\,dx$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $k \geqq 1$ のとき，a_k と a_{k-1} の間に成り立つ関係式を求めよ．

(2) $b_k = \dfrac{a_k}{k!}$ とおく．$k \geqq 1$ のとき，b_k と b_{k-1} の間の関係を求め，これよりすべての自然数 n に対して $b_n - b_0 = -e^{-1}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}$ が成り立つことを示せ．

(3) すべての自然数 n に対して，不等式 $0 \leqq a_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$ が成り立つことを示し，これを用いて $e = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}$ となることを証明せよ．

【テーマ】：積分と数列の融合

方針

(1) の漸化式は，部分積分法を用いて導きます．また，(2) では漸化式を解くことになりますが，(1) で求めた漸化式の両辺を $k!(\neq 0)$ で割ってみましょう．(3) では，はさみうちの原理を利用します．

♣　♠

解答

(1) 部分積分法を用いて計算すると，

$$\begin{aligned} a_k &= \Big[-e^{-x}x^k\Big]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})kx^{k-1}\,dx \\ &= -e^{-1} + k\int_0^1 e^{-x}x^{k-1}\,dx \\ &= -e^{-1} + ka_{k-1} \end{aligned}$$

ゆえに，求める関係式は，$\boldsymbol{a_k = ka_{k-1} - \dfrac{1}{e}}$……(**答**)

(2) (1) で求めた漸化式の両辺を $k!(\neq 0)$ で割ると，

$$\frac{a_k}{k!} = \frac{ka_k}{k!} - \frac{1}{e(k!)} \iff \frac{a_k}{k!} = \frac{a_{k-1}}{(k-1)!} - \frac{1}{e(k!)}$$

よって，$b_k = \dfrac{a_k}{k!}$ とおけば，$\boldsymbol{b_k = b_{k-1} - \dfrac{1}{e(k!)}}$……(**答**) を得る．

【証明】 $b_k = b_{k-1} - \dfrac{1}{e(k!)}$ において，$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ を代入すると，

$$\begin{aligned} b_1 &= b_0 - \frac{1}{e(1!)} \\ b_2 &= b_1 - \frac{1}{e(2!)} \\ b_3 &= b_2 - \frac{1}{e(3!)} \\ &\ \vdots \\ b_n &= b_{n-1} - \frac{1}{e(n!)} \end{aligned}$$

☜ 階差数列と捉えて計算することもできます．その際は，

$$b_n = b_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{e(k!)}$$

となります．しかし，通常より番号が少しずれているので，間違える可能性が高いため注意が必要です．

となるので，これらの辺々を加えると，

$$b_n = b_0 - \frac{1}{e}\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!}\right) \iff b_n - b_0 = -e^{-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$$

よって，示された. **(証明終)**

(3) **【証明】**

$0 \leqq x \leqq 1$ において，$0 \leqq e^{-x} \leqq 1$ が成り立つので，

$$0 \leqq e^{-x}x^n \leqq x^n \qquad (\because \quad x^n \geqq 0)$$

が成り立つ．よって，各辺を 0 から 1 まで定積分して，

$$\int_0^1 0\,dx \leqq \int_0^1 e^{-x}x^n\,dx \leqq \int_0^1 x^n\,dx \iff 0 \leqq a_n \leqq \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

を得るので，$0 \leqq a_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$ が示された．この式において $n \to \infty$ とすると，はさみうちの原理により，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n!} = 0$

したがって，(2) で示した式において，$n \to \infty$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty} b_n - b_0 = -e^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!} \iff eb_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

を得る．

$$b_0 = \frac{a_0}{0!} = \int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} + 1 \qquad (\because \quad 0! = 1)$$

であるから，

$$-1 + e = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!} \iff e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

が成り立ち，示された. **(証明終)**

◇ ♡

解説

この問題の目的は，e の値を無限級数で表すことです．類似の問題は，様々な大学で数多く出題されています．すなわち，解答の流れをしっかりと理解して，誘導が多少なくても結論までたどり着けるようにしておくようにしましょう．

(3) の前半で積分不等式を作り $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ をはさみうちの原理を用いて求めましたが，この積分不等式を作る問題は頻出です．ポイントは，積分区間で成り立つ不等式を作ることです．ただし，目的の不等式の形を見定めてから作らないといけません．本問でもしも $e^{-1} \leqq e^{-x} \leqq 1$ という不等式を母体にして計算を進めていくと結論は得られません．適切な不等式を母体にすることが大切なのです．

