36 （′83　鹿児島大） 【難易度】 … やや難

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ について，曲線 $y=f(x)$ を C とし，正の数 t に対し曲線 $y=f(x-t)$ を C_t とする．

(1) C_t と C が相異なる 2 点で交わるような t が存在するための a, b の満たす必要十分条件を求めよ．

(2) a, b が (1) の条件を満たすとする．C_t と C が相異なる 2 点で交わるとき，この 2 つの曲線によって囲まれる図形の面積を $S(t)$ とおく．$S(t)$ を最大にする t の値と $S(t)$ の最大値を求めよ．

【テーマ】：面積

方針

(2) では，$S(t)$ が t について無理関数になるので，このままでは，解くのが面倒です．そこで $\{S(t)\}^2$ を計算することを考え，さらに置き換えによって，次数を下げることを行います．

♣　♠

解答

(1) $f(x-t)=f(x)$ とおくと，

$$(x-t)^3+a(x-t)^2+b(x-t)=x^3+ax^2+bx$$
$$-3tx^2+3t^2x-t^3-2atx+at^2-bt=0$$
$$3tx^2-(3t^2-2at)x+t(t^2-at+b)=0$$

$t \neq 0$ であるから，

$$3x^2+(2a-3t)x+(t^2-at+b)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．C_t と C が相異なる 2 点で交わるためには，この方程式が異なる 2 つの実数解をもてばよいので，判別式を D とすると，

$$D=(2a-3t)^2-12(t^2-at+b)>0$$
$$4a^2-3t^2-12b>0 \qquad \therefore\ 3t^2<4(a^2-3b) \quad \cdots\cdots ②$$

$t^2>0$ であるから，② を満たす t が存在するためには，$a^2-3b>0$ であることが必要で，逆にこのとき，不等式 ② を満たす t の値が存在するので，十分性も満たされている．

ゆえに，求める a, b の満たす条件は，$\boldsymbol{a^2-3b>0}$……(**答**)

(2) 題意から，方程式 ① は異なる 2 つの実数解をもつので，その 2 解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，解と係数の関係から，

$$\alpha+\beta=-\frac{2a-3t}{3},\quad \alpha\beta=\frac{t^2-at+b}{3} \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．さらに，$t>0$ であるから，

☜ $t>0$ なので，x 軸の正の方向に平行移動した $f(x-t)$ のグラフの方が上にある

$$S(t)=\int_\alpha^\beta \{f(x-t)-f(x)\}\,dx$$
$$=-t\int_\alpha^\beta \{3x^2+(2a-3t)x+(t^2-at+b)\}\,dx$$
$$=-3t\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=-\frac{-3t}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{t}{2}(\beta-\alpha)^3$$

よって,

$$\{S(t)\}^2 = \frac{t^2}{4}\{(\beta-\alpha)^2\}^3$$
$$= \frac{t^2}{4}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^3$$
$$= \frac{t^2}{4}\left\{\frac{(2a-3t)^2}{9} - 4\cdot\frac{t^2-at+b}{3}\right\}^3 \quad (\because\ ③)$$
$$= \frac{t^2}{4}\left(\frac{-3t^2+4a^2-12b}{9}\right)^3$$

ここで, $t^2=X$ とおくと, ② から $0<X<\dfrac{4(a^2-3b)}{3}$ であり, $\{S(t)\}^2=g(X)$ とおくと,

$$g(X) = \frac{X}{4\cdot 9^3}(-3X+4a^2-12b)^3$$
$$g'(X) = \frac{1}{4\cdot 9^3}\{(-3X+4a^2-12b)^3 - 9X(-3X+4a^2-12b)^2\}$$ ☞ 解説 **積の微分法**
$$= -\frac{(-3X+4a^2-12b)^2(3X-a^2+3b)}{9^3}$$

② より, $(-3X+4a^2-12b)^2>0$ であるから, $g'(X)=0$ のとき, $X=\dfrac{a^2-3b}{3}(>0)$ である.

X	0	$\cdots$	$\frac{a^2-3b}{3}$	$\cdots$	$\frac{4(a^2-3b)}{3}$
$g'(X)$		$+$	0	$-$	
$g(X)$		↗	極大	↘	

よって, 増減表より $X=\dfrac{a^2-3b}{3}$ のとき, $g(X)$ は極大かつ最大となるので, このとき, $g(X)$ すなわち $\{S(t)\}^2$ の最大値は,

$$g\left(\frac{a^2-3b}{3}\right) = \frac{a^2-3b}{12\cdot 9^3}(3a^2-9b)^3 = \left\{\frac{(a^2-3b)^2}{18}\right\}^2$$

となる. $S(t)>0$ であるから,

$$\boldsymbol{t=\sqrt{\frac{a^2-3b}{3}}}\ \textbf{のとき，最大値}\ \boldsymbol{\frac{(a^2-3b)^2}{18}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

である.

◇ ♡

解説

(2) では, $S(t)$ の次数が高くなるので, 置き換えなどを行って次数を下げるほうが計算が楽になります. とは言っても $g(X)$ は X についての 4 次関数なので, 微分をするときは, 以下の積の微分公式を使って楽に微分しましょう. 内容的には数学 III の範囲ですが, 文系の人でも知っておくとよいでしょう.

【積の微分法】

u, v, w は x の関数であるとする. このとき, 次の式が成り立つ.

$$(uv)' = u'v+uv'\ ,\quad (uvw)' = u'vw+uv'w+uvw'$$