31 【難易度】 … 標準

2 つの放物線 $y = x^2$, $y = -x^2 + 4x - 3$ 上にそれぞれ動点 P, Q をとる．線分 PQ の長さが最小となるとき，P, Q の座標をそれぞれ求めよ．

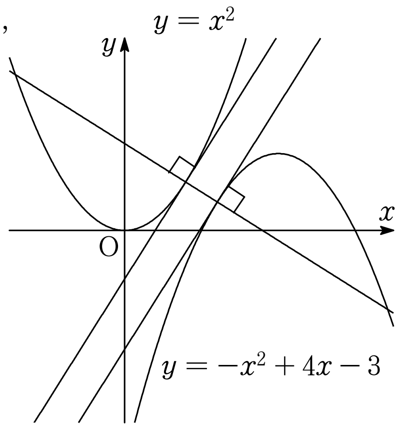
【テーマ】：曲線の最短距離

方針

曲線の最短距離を求めるためには，互いの法線が一致する場合を考えます．

♣ ♠

解答



$\mathrm{P}(s,\, s^2)$，$\mathrm{Q}(t,\, -t^2 + 4t - 3)$ とおくと，PQ の長さが最小となるのは，点 P, Q における法線が一致するときである．

$y = x^2$ において，$y' = 2x$ であるから，点 P における法線の方程式は，

$$y = -\frac{1}{2s}(x - s) + s^2$$

$$y = -\frac{1}{2s}x + s^2 + \frac{1}{2} \cdots\cdots ①$$

また，$y = -x^2 + 4x - 3$ において，$y' = -2x + 4$ であるから，点 Q における法線の方程式は，

$$y = -\frac{1}{-2t+4}(x - t) - t^2 + 4t - 3$$

$$y = \frac{1}{2t-4}x + \frac{t}{-2t+4} - t^2 + 4t - 3 \cdots\cdots ②$$

である．よって，①, ② が一致するとき，

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2s} = \dfrac{1}{2t-4} & \cdots\cdots ③ \\ s^2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{t}{-2t+4} - t^2 + 4t - 3 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

が成り立てばよい．③ より，

$$2t - 4 = -2s \iff t - 2 = -s$$

これを ④ に代入して t を消去すると，

$$\begin{aligned} s^2 + \frac{1}{2} &= -\frac{t}{2(t-2)} - (t^2 - 4t) - 3 \\ &= -\frac{(t-2)+2}{2(t-2)} - (t-2)^2 + 1 \\ &= \frac{-s+2}{2s} - s^2 + 1 \end{aligned}$$

両辺に $2s$ をかけて，

$$2s^3 + s = -s + 2 - 2s^3 + 2s \iff s^3 = \frac{1}{2}$$

ゆえに，$s = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$，$t = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + 2$ を得るので，このとき，

$$s^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}},\ -t^2 + 4t - 3 = -(t-2)^2 + 1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + 1$$

となるので，点 P, Q の座標は，

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right),\ \mathbf{Q}\left(2 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

◇ ――――― ♡

$\boxed{\text{解説}}$

本問では放物線を扱っていますが，どのような曲線でも同じような考え方で解決できます．s を消去して t の式を作ると，うまく答えが出せません．$t-2=-s$ という式をうまく使って計算をするためには，計算テクニックを磨いておく必要があります．

また，2 点間の距離を d として，

$$d^2=(s-t)^2+(s^2+t^2-4t+3)^2$$

の最小値を考えるという方法もありますが，s, t について 4 次式となるため，計算がかなり大変で現実的ではありません．