29 （'07　北海道大） 【難易度】… やや難

4 枚のカードがあって，1 から 4 までの整数がひとつずつ書かれている．このカードをよく混ぜて，1 枚引いては数字を記録し，カードを元に戻す．この試行を n 回繰り返し，記録した順に数字を並べて得られる数列を，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ とする．

(1) 条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする．ただし，$j = 1, 2, 3, 4$ とする．

（ i ） $A_n(1)$, $A_n(2)$ を求めよ．

（ii） $n \geqq 2$ のとき，$A_n(j)$ $(j = 3, 4)$ を $A_{n-1}(1)$, $A_{n-1}(2)$, $\cdots$, $A_{n-1}(j)$ で表し，$A_n(3)$, $A_n(4)$ を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ．

【テーマ】：重複組合せ

方針

(1) では，漸化式を作って $A_n(j)$ $(j = 3, 4)$ を求めさせようと誘導しています．重複組合せの考え方を使えば (1) は簡単に答えが求められます．

♣ ♠

解答

(1) （ i ） $j = 1$ のとき，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ となればよいので，その場合の数は，$\boldsymbol{A_n(1) = 1}$……**(答)**

さらに，$j = 2$ のとき，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 2$ となるときであるから，$2 \leqq k \leqq n$ とするとき，

『$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 2$』または『$a_1 = \cdots = a_{k-1} = 1$ かつ $a_k = \cdots = a_n = 2$』

となればよいので，その場合の数は，$\boldsymbol{A_n(2) = n}$……**(答)**

（ii） 次に，$n \geqq 2$ のとき，$A_n(j)$ $(j = 3, 4)$ を考える．このとき，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 3$

となるのは，

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} = 3$ かつ $a_n = 3$

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} = 2$ かつ $a_n = 3$

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} = 1$ かつ $a_n = 3$

のいずれかであるから，

$$\boldsymbol{A_n(3) = a_{n-1}(1) + a_{n-1}(2) + a_{n-1}(3)}\text{……(答)}$$

同様にして

$$\boldsymbol{A_n(4) = a_{n-1}(1) + a_{n-1}(2) + a_{n-1}(3) + a_{n-1}(4)}\text{……(答)}$$

を得る．

(1) の結果を用いると，

$$A_n(3) = 1 + (n-1) + A_{n-1}(3) \iff A_n(3) = A_{n-1}(3) + n \text{ …… ①}$$

となるので，① において，n に 2 から n までを代入して辺々加えて，

$$A_n(3) = A_1(3) + \sum_{k=2}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}\text{……(答)}\quad (n = 1 \text{ のときも成立})$$

また，

$$A_n(4)=1+(n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)+A_{n-1}(4) \iff A_n(4)=A_{n-1}(4)+\frac{1}{2}n(n+1) \cdots\cdots ②$$

となるので，② において，n に 2 から n までを代入して辺々加えて，

$$\begin{aligned} A_n(4) &= A_1(4)+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}\cdots\cdots(\textbf{答}) \quad (n=1 \text{ のときも成立}) \end{aligned}$$

(2)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となるのは，

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}=j \text{ かつ } a_n < j \quad (j=2,\ 3,\ 4)$$

となるときであるから，求める確率を P とすると，

$$\begin{aligned} P &= \frac{A_{n-1}(2)\cdot 1+A_{n-1}(3)\cdot 2+A_{n-1}(4)\cdot 3}{4^n} \\ &= \frac{(n-1)+n(n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)(n+1)}{4^n} \\ &= \boldsymbol{\frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{2\cdot 4^n}}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

別解

(1)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ となるのは，

$$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq j \text{ かつ } a_n=j$$

となるときで，これは

$$1 \leqq a_1 < a_2+1 < a_3+2 < \cdots < a_{n-1}+(n-2)=j+(n-2) \text{ かつ } a_n=j+(n-2)$$

と同値であるから，

$j=1$ のとき，$A_n(1)={}_{n-1}\mathrm{C}_0=\mathbf{1}$……(**答**)

$j=2$ のとき，$A_n(2)={}_{n}\mathrm{C}_1=\boldsymbol{n}$……(**答**)

$j=3$ のとき，$A_n(3)={}_{n+1}\mathrm{C}_2=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}$……(**答**)

$j=4$ のとき，$A_n(4)={}_{n+2}\mathrm{C}_3=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}$……(**答**)

◇　♡

解説

漸化式を作って解くという誘導がついていますが，重複組合せの考え方を用いれば簡単に解答することができます．有名な問題なので，知っておきましょう．ポイントは，イコールを取り去ることです． **別解** でとり上げたように，a_2 に 1 を加えると必ず a_1 より大きくなりますから，ここでイコールを取り去ることができます．もちろん $a_3 \sim a_{n-1}$ にも 1 を加える必要があります．次に a_3 にもさらに 1 を加えることで a_2 よりも大きくできてここのイコールも取り去ることができます．このようにして順に 1 を加えていくことで，すべてのイコールを取り去るのです．そうすれば，

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} = j+(n-2)$$

という形が得られます．その組合せは，$j+(n-2)$ 個の中から $j-1$ 個を選ぶ組合せに等しくなるので，${}_{j+(n-2)}\mathrm{C}_{j-1}$ として求めることができるのです．(○と｜の並べ方の総数の問題です．)