28 （'83　神戸大） **【難易度】** … 標準

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}ka_k \quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

により定められている．このとき，次の問いに答えよ．

（1） $n \geqq 2$ のとき，a_{n+1} と a_n の関係式を求めよ．

（2） a_n を n の式で表せ．

（3） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_{k+1}}$ を求めよ．

【テーマ】：隣接２項間漸化式

方針

漸化式が和の形で与えられているので，一度すべてをかき下してみると方針が立ちます．(2) では，(1) で求めた漸化式の両辺を $(n+1)!$ で割って a_n を計算しますが，漸化式が $n \geqq 2$ でしか成り立っていないので，注意が必要です．

♣ ♠

解答

（1） 与えられた漸化式をかき下すと，

$$a_{n+1}=a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n \cdots\cdots ①$$

であり，$n \geqq 2$ のとき，同様にかき下すと，

$$a_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+(n-1)a_{n-1} \cdots\cdots ②$$

となる．よって，① − ② から，

$$a_{n+1}-a_n=na_n \iff \boldsymbol{a_{n+1}=(n+1)a_n\ (n \geqq 2)}\cdots\cdots\textbf{（答）}$$

（2） (1) で求めた漸化式の両辺を $(n+1)! \fallingdotseq 0$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a_n}{n!}$$

を得るので，

$$\frac{a_n}{n!}=\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{a_{n-2}}{(n-2)!}=\cdots\cdots=\frac{a_3}{3!}=\frac{a_2}{2!}=\frac{a_1}{2!}=\frac{1}{2}$$ ☞ 解説

となる．したがって，$a_n=\dfrac{n!}{2}$ $(n \geqq 2)$ であり，$n=1$ のとき，$a_1=\dfrac{1}{2}$ となるので，成り立たない．
ゆえに，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1=1} \\ \boldsymbol{a_n=\dfrac{n!}{2}\quad (n \geqq 2)} \end{cases}\cdots\cdots\textbf{（答）}$$

(3) (2) より,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{(k+1)!}\\
&= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}\\
&= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)\\
&= 2\left\{\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)\right\}\\
&= \boldsymbol{2\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}
$$

解説

(1) は, 和と一般項の関係をしっかりと理解できているかどうかがポイントになります. それを応用したものになります.

(2) は, (1) で求めた漸化式が $n \geqq 2$ のときでしか成り立つ保障がないので,

$$\frac{a_n}{n!}=\cdots\cdots=\frac{a_2}{2!}\ \cdots\cdots(*)$$

までしか計算できません. 何も考えずにやってしまうと, つい

$$\frac{a_n}{n!}=\cdots\cdots=\frac{a_2}{2!}=\frac{a_1}{1!}$$

としてしまいがちなので, 注意が必要です. 本解では, $(*)$ の後の計算は, 元の漸化式を利用して $a_2=a_1$ となることから,

$$\frac{a_2}{2!}=\frac{a_1}{2!}=\frac{1}{2}$$

としています.

(3) では

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_{k+1}}=\frac{1}{a_2}+\frac{2}{a_3}+\frac{3}{a_4}+\cdots\cdots+\frac{n}{a_{n+1}}$$

となるので, (2) の $a_n=\dfrac{n!}{2}\ (n \geqq 2)$ を利用すればよく, a_1 は必要ありません. また, 階乗を伴う部分分数分解

$$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$$

は, 知っておくとよいでしょう.