27 （'06　岡山大） 【難易度】 … 標準

行列 $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は，次の関係式で定まるものとする．

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\quad A_n = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2+(-1)^n \end{pmatrix} A_{n-1}\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

（1） b_3 の値を求めよ．

（2） b_{2n+1} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を n の式で表せ．

（3） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n+1}}{b_{2n}}$ の値を求めよ．

【テーマ】：行列と数列

方針

(2) では，数列 $\{b_n\}$, $\{d_n\}$ の漸化式を求めます．あとは，n が偶数か奇数かによって $\{d_n\}$ の一般項を求め，b_{2n+1} を計算しましょう．

♣ ♠

解答

（1） 与えられた漸化式から，

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 38 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

したがって，$\boldsymbol{b_3 = 38}$……**(答)**

（2） 与えられた漸化式から，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2+(-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ c_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix}$$

となるので，右辺を計算してそれぞれの成分を比較すると，

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3c_{n-1} & \cdots\cdots\ ① \\ b_n = b_{n-1} + 3d_{n-1} & \cdots\cdots\ ② \\ c_n = \{2+(-1)^n\}c_{n-1} & \cdots\cdots\ ③ \\ d_n = \{2+(-1)^n\}d_{n-1} & \cdots\cdots\ ④ \end{cases}$$

である．ここで，$c_2 = c_3 = 0$ であることから，③ より，$c_n = 0$ であることがわかり，① へ $c_{n-1} = 0$ を代入して，$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = 1$ であることもわかる．

次に，④ より，自然数 k に対して，

$n=2k$ のとき，　　$d_{2k}=3d_{2k-1}$

$n=2k-1$ のとき，　$d_{2k-1}=d_{2(k-1)}$

となるので，これらから d_{2k-1} を消去して，

$$d_{2k}=3d_{2(k-1)}$$

を得るので，数列 $\{d_{2k}\}$ は，初項 $d_2=9$，公比 3 の等比数列で，

$$d_{2k}=9\cdot 3^{k-1}=3^{k+1}$$

となる．したがって，$d_{2k+1}=3^{k+1}$ を得る．さらに，② において，n を $2n+1$ に変えると，

$$b_{2n+1}=b_{2n}+3d_{2n} \iff b_{2n+1}=b_{2n}+3\cdot 3^{n+1} \cdots\cdots ⑤$$

となり，② において，n を $2n$ に変えると，

$$b_{2n}=b_{2n-1}+3d_{2n-1} \iff b_{2n}=b_{2n-1}+3\cdot 3^{n} \cdots\cdots ⑥$$

となる．したがって，⑤, ⑥ より，

$$b_{2n+1}=b_{2n-1}+4\cdot 3^{n+1} \iff b_{2n+1}-b_{2n-1}=4\cdot 3^{n+1}$$

であり，

$$\begin{aligned} b_{2n+1}&=b_1+\sum_{k=1}^{n}4\cdot 3^{k+1}\\ &=2+\frac{36(3^n-1)}{3-1}\\ &=2+18(3^n-1)\\ &=\mathbf{2(3^{n+2}-8)}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

(3)　(2) より，$b_{2n+1}=2(3^{n+2}-8)$ であり，⑥ より，

$$b_{2n}=2(3^{n+1}-8)+3^{n+1}=3^{n+2}-16$$

であるから，求める極限値は，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n+1}}{b_{2n}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2(3^{n+2}-8)}{3^{n+2}-16}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1-\frac{8}{3^{n+2}}\right)}{1-\frac{16}{3^{n+2}}}\\ &=\mathbf{2}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

◇　♡

$\boxed{\text{解説}}$

(2) 以降は，番号を数え間違えないように十分注意を払う必要があります．特に，階差数列の計算をするとき，混乱するようなら階差数列から元の数列の一般項を求める方法を，基本に戻って考えることも必要になるでしょう．

本問では，$\{d_n\}$ がポイントになります．$\{d_n\}$ の漸化式に $(-1)^n$ という項があるので，n が偶数か奇数かで状況が変わってきます．したがって，場合分けが発生するのです．また，それを使って b_n を求めるので，当然 b_n も偶数か奇数かで一般項が異なります．よくわからないときや混乱したときは，$n=2, 3, 4, 5, \cdots$ と少し計算をしてみて法則を見つけるといいかもしれません．