26 （'97　千葉工業大）　　　　【難易度】… 標準

k は正の定数とする．3 次関数 $f(x)=x^3-3kx^2+3kx$ について，次の各問いに答えよ．

（1） $f(x)$ が極値をもつような k の値の範囲を求めよ．

（2） $f(x)$ が $x=\alpha$ と $x=\beta$ で極値をとるとき，$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ を k を用いて表せ．

（3） $f(x)$ が $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとるとき，$\beta-\alpha$ と $f(\alpha)-f(\beta)$ を k を用いて表せ．

（4） $f(\alpha)-f(\beta)=32$ を満たす k の値を求めよ．

【テーマ】：極値の差

方針

(1) の極値をもつ条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつときなので，判別式を利用します．(3) で，極値の差を求める場合は，解と係数の関係を利用して素直に計算しても求まりますが，定積分を利用すると公式が使える形になるのであっさりと答えが出せます．

解答

（1） $f'(x)=3x^2-6kx+3k=3(x^2-2kx+k)$ であるから，

$x^2-2kx+k=0$ の判別式を D とすると，題意をみたす条件は $D>0$ である．,

$$D/4=k^2-k>0 \iff k<0,\ 1<k$$

$k>0$ であるから，求める k の値の範囲は，$\boldsymbol{k>1}$……(**答**)

（2） α,β は，$x^2-2kx+k=0$ の 2 解であるから，解と係数の関係より，

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=2k,\quad \alpha\beta=k}\text{……(答)}$$

（3） $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4k^2-4k$

であり，題意から $\beta>\alpha$ となることがわかるので，

$$\boldsymbol{\beta-\alpha=2\sqrt{k^2-k}}\text{……(答)}$$

☜ 3 次の係数が正で $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとるので，$\beta>\alpha$ であることがわかります．

また，

$$\begin{aligned}
f(\alpha)-f(\beta)&=-\Big[\,f(x)\,\Big]_\alpha^\beta\\
&=-\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx\\
&=\frac{3}{6}(\beta-\alpha)^3\\
&=\frac{1}{2}\cdot 8(k^2-k)^{\frac{3}{2}}\\
&=\boldsymbol{4(k^2-k)^{\frac{3}{2}}}\text{……(答)}
\end{aligned}$$

☜ α,β は，$f'(x)=0$ の解なので，下の 解説 にある 公 式 が使える．ただし，$f'(x)=3x^2-6kx+3k$ なので，2 次の係数を忘れないようにしましょう．

(4) (3) より,

$$4(k^2-k)^{\frac{3}{2}}=32$$

$$(k^2-k)^{\frac{3}{2}}=8$$

$$k^2-k=8^{\frac{2}{3}}$$

$$k^2-k-4=0 \qquad \therefore \quad k=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

$k>1$ より, $\boldsymbol{k=\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$ ……(**答**)

解説

本問のメインは (3) の計算にあると言ってよいでしょう. (2) と $\beta-\alpha$ の値を求めよという設問は, $f(\alpha)-f(\beta)$ を計算するための準備にすぎません. もちろん正直に計算してもできますが, 効率よい計算を知っておくことはいろいろな視点から問題を眺めることができるようになるため, 非常に大切なのです. 特に, 以下の定積分の公式は, 利用できる場面が多いので確実にマスターして使えるようにしておきましょう. この公式を使うときは, 2 次の係数を忘れる人が多いので要注意です.

公 式

【定積分の公式】

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ の 2 解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とするとき, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\,dx &= \int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

教科書や参考書などでは, a がない形で書かれていると思いますが, 実際の計算では 2 次の係数をかけるのを忘れる人が多いので, 2 次の係数 a をつけた状態で覚えておくとよいでしょう. これは, 面積計算をする際によく用いられます.